

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»

Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике

Заключительный этап, 2024–2025 учебный год

1. Имеется три различных ёмкости. В первые две ёмкости налили коктейли, смесь яблочного и виноградного соков. В третью ёмкость налили яблочный сок. Известно, что если смешать содержимое первых двух ёмкостей, то в полученном коктейле будет 70% виноградного сока; если смешать содержимое первой и третьей ёмкостей, то в полученном коктейле будет 10% виноградного сока; если смешать содержимое второй и третьей ёмкостей, то в полученном коктейле будет 20% виноградного сока. Найдите процентное содержание виноградного сока в коктейле, полученном смешиванием содержимого всех трех ёмкостей.

Критерии оценивания. В условии задачи присутствует ошибка, которая приводит к неоднозначному ответу. За верно составленную систему уравнений жюри ставило полные 7 баллов за задачу.

2. Студент ДВФУ Ваня решил сварить макароны, но с ужасом заметил, что у него сел телефон и он не может отсчитать необходимые 6 минут для варки макарон. Ваня вспомнил, что у него на полке стоит пара красивых песочных часов на 3 и 4 минуты. Когда вода в кастрюле закипела, радостный Ваня поставил часы на 3 минуты. Спустя некоторое время Ваня понял, что забыл кинуть макароны в кастрюлю, и спешно это сделал. А когда посмотрел на часы, то увидел, что песок в них ещё не до конца осыпался. Как теперь Ване отмерить 6 минут с помощью имеющейся пары песочных часов, чтобы не переварить макароны? (Временем на переворачивание часов можно пренебречь. Песок во всех часах сыпется с одинаковой постоянной скоростью)

Решение. Предположим, что в момент времени, когда Ваня кинул макароны в кастрюлю с кипящей водой, на трёхминутных часах оставалось ещё x минут. Приведём алгоритм действий, позволяющий отмерить 6 минут:

- 1) перевернуть четырёхминутные часы (прошло 0 минут),
- 2) когда песок в трёхминутных часах закончится, перевернуть все часы (прошло x минут); в четырёхминутных часах осталось песка на x минут,
- 3) когда песок в четырёхминутных часах закончится, перевернуть четырёхминутные часы (макароны варятся уже $2x$ минут); в трёхминутных часах осталось песка на $3 - x$ минут,
- 4) когда песок в трёхминутных часах закончится, перевернуть четырёхминутные часы (от начала прошло $x + 3$ минут); в четырёхминутных часах осталось песка на $3 - x$ минут,
- 5) подождать, пока высыпется весь песок в четырёхминутных часах (макароны готовы, так как прошло 6 минут).

Критерии оценивания. За любой верный алгоритм – 7 баллов. Любой алгоритм, предполагающий дополнительную трату времени или измерение песка «на глаз», оценивается в 0 баллов.

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 105 см. Высота этого треугольника разделена на четыре равные части тремя точками. Через эти три точки и одну

из вершин основания проведены три прямые, которые разделили боковую сторону на четыре отрезка. Найдите длину каждого из этих четырёх отрезков.

Решение. Пусть $AB = BC$, BD – высота, $BE = FE = FG = GD$.

Проведем BI параллельно AC .

$\triangle EBJ \sim \triangle EDA$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BJ}{AD} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $BJ = x$, тогда $AD = DC = 3x$.

$\triangle BJS \sim \triangle CAS$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BJ}{CA} = \frac{BS}{CS} = \frac{1}{6}.$$

Пусть $BS = y$, тогда $CS = 6y$.

$BC = BS + SC = 7y = 105$. Откуда, $y = 15$, $BS = 15$ см, $CS = 90$ см.

$\triangle FBI \sim \triangle FDA$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BI}{AD} = \frac{1}{1}.$$

Тогда $BI = AD = 3x$ и $JI = 2x$.

$\triangle TBI \sim \triangle TCA$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BI}{AC} = \frac{BT}{TC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $BT = z$, тогда $CT = 2z$. $BC = BT + TC = 3z = 105$. Откуда, $z = 35$. Тогда $BT = 35$ см, $ST = BT - BS = 20$ см, $TC = 70$ см.

$\triangle BGH \sim \triangle DGA$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BH}{AD} = \frac{BG}{GD} = \frac{3}{1}.$$

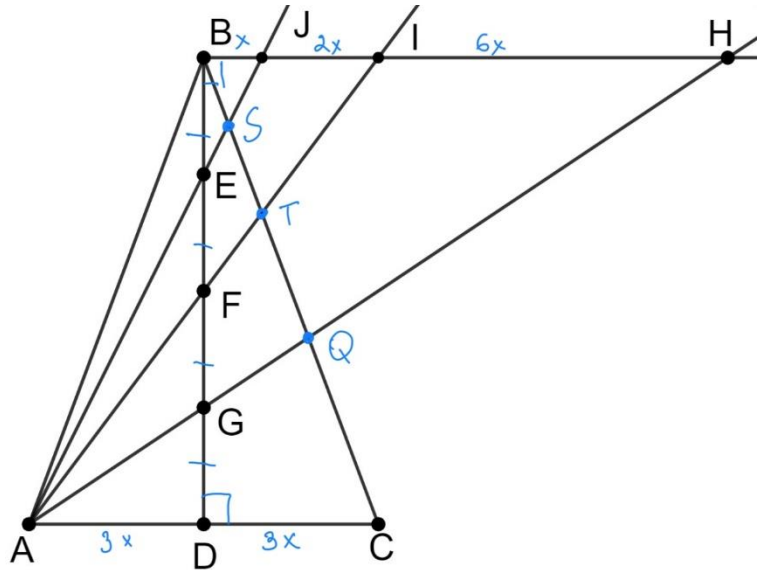
Тогда $BH = 3AD = 9x$, а $HI = 6x$.

$\triangle QBH \sim \triangle QCA$ (по 2 углам), откуда

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BH}{AC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Пусть $BQ = 3t$, тогда $CQ = 2t$. $BC = BQ + CQ = 5t = 105$. Откуда, $t = 21$. Тогда $BQ = 63$ см, $CQ = 42$ см.

Ответ: 15, 20, 28 и 42 см.



4. Найдите минимальное значение выражения

$$x^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy$$

для $x > 0, y > 0$.

Решение. Заметим, что $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y - 2)^2 \geq 0$. Раскроем скобки и сложим первое неравенство со вторым, умноженным на $x/2$. Тогда

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy + 2x \geq 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy \geq -1.$$

Поэтому минимальное значение выражения $x^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy$ равно -1 и достигается при $x = 1, y = 2$.

Ответ: -1 .

5. Пусть $f(x)$ – многочлен с натуральными коэффициентами, b_n – сумма цифр числа $f(n)$, где n – натуральное число. Докажите, что существует натуральное число, которое бесконечное множество раз встречается среди чисел $b_1, b_2, b_3, \dots$

Доказательство. Пусть $f(x) = a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$. Выберем натуральное число n такое, что $10^n > \max\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. Тогда сумма цифр числа $f(10^n) = a_m10^{mn} + \dots + a_110^n + a_0$ равна сумме цифр всех чисел $a_m, \dots, a_1, a_0$. Следовательно, число, равное сумме цифр всех чисел $a_m, \dots, a_1, a_0$, бесконечное множество раз встречается во множестве $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.