

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»

Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике

Заключительный этап, 2024–2025 учебный год

1. Имеется три различных ёмкости. В первые две ёмкости налили коктейли, смесь яблочного и виноградного соков. В третью ёмкость налили яблочный сок. Известно, что если смешать содержимое первых двух ёмкостей, то в полученном коктейле будет 70% виноградного сока; если смешать содержимое первой и третьей ёмкостей, то в полученном коктейле будет 10% виноградного сока; если смешать содержимое второй и третьей ёмкостей, то в полученном коктейле будет 20% виноградного сока. Найдите процентное содержание виноградного сока в коктейле, полученном смешиванием содержимого всех трех ёмкостей.

2. Студент ДВФУ Ваня решил сварить макароны, но с ужасом заметил, что у него сел телефон и он не может отсчитать необходимые 6 минут для варки макарон. Ваня вспомнил, что у него на полке стоит пара красивых песочных часов на 3 и 4 минуты. Когда вода в кастрюле закипела, радостный Ваня поставил часы на 3 минуты. Спустя некоторое время Ваня понял, что забыл кинуть макароны в кастрюлю, и спешно это сделал. А когда посмотрел на часы, то увидел, что песок в них ещё не до конца осыпался. Как теперь Ване отмерить 6 минут с помощью имеющейся пары песочных часов, чтобы не переварить макароны? (Временем на переворачивание часов можно пренебречь. Песок во всех часах сыпется с одинаковой постоянной скоростью)

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 105 см. Высота этого треугольника разделена на четыре равные части тремя точками. Через эти три точки и одну из вершин основания проведены три прямые, которые разделили боковую сторону на четыре отрезка. Найдите длину каждого из этих четырёх отрезков.

4. Найдите минимальное значение выражения

$$x^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy$$

для $x > 0, y > 0$.

5. Пусть $f(x)$ – многочлен с натуральными коэффициентами, b_n – сумма цифр числа $f(n)$, где n – натуральное число. Докажите, что существует натуральное число, которое бесконечное множество раз встречается среди чисел $b_1, b_2, b_3, \dots$