

Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 7 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

- иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;
- выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;
- пользоваться справочными материалами;
- разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

10 класс

1. Найдите сумму всех целых чисел от 1 до 250 включительно, кратных либо 29, либо 35.

2. Есть три человека A , B и C , один из них — рыцарь (который всегда говорит правду), один — лжец (который всегда лжет), а третий — шпион (который может либо лгать, либо говорить правду).

A говорит: « B или C — шпион».

B ничего не сказал, так как ранее он сильно прикусил язык.

C говорит: « A или B — рыцарь».

Определите кто из A , B , C является лжецом.

3. В вершинах шестиугольника расставили числа 1, 2, 3, 4, 5, 5 (пятерка встречается дважды). Затем каждому ребру шестиугольника приписали число, равное произведению чисел на его концах. Найдите наибольшую возможную сумму чисел на всех ребрах.

4. В правильном тетраэдре $SABC$, SH — высота ΔSBC , S' — проекция точки S на плоскость ABC . На стороне AB выбрана точка K такая, что угол $S'HK$ равен 60° . Найдите отношение объёмов $\frac{V_{SS'HK}}{V_{SABC}}$.

5. Решите в натуральных числах

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$$

6. Докажите, что для любых $c, x > 0$ выполняется неравенство

$$2x^3 + 2c^3 \geq 3cx^2$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = 4, \\ y^3 - z^2 = 4, \\ z^3 - x^2 = 4. \end{cases}$$