Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 7 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

– иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;

– выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;

– пользоваться справочными материалами;

– разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

11 класс

1. Упорядочите числа по убыванию (от большего к меньшему): $333^3, 33^{33}, 3^{333}, 33^{3^3}, 3^{33^3}, 3^{3^{33}}, 3^{3^{3^3}}$.

2. Есть три человека A, B и C, один из них — рыцарь (который всегда говорит правду), один — лжец (который всегда лжет), а третий — шпион (который может либо лгать, либо говорить правду).

A говорит: «B — шпион».

B говорит: «A солгал».

C говорит: «B солгал».

Выясните кто из них шпион.

3. Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$. Найдите $sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$.

4. Докажите, что данное уравнение разрешимо в натуральных числах для любого натурального n

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = n.$$

5. При $x \in [0; 100]$ найдите количество различных целых значений функции

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{2}\right] + [3x] + [4x],$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

6. Имеется куб $3 \times 3 \times 3$. В каждую ячейку куба можно поместить по одному магическому кролику. Волшебник Эрлих поймал 16 магических кроликов из которых было 3 черных, 8 красных и 5 белых. Сколькими способами он может рассадить в ячейки куба кроликов, с точностью до поворотов и отражений? (То есть считаем, что две рассадки одинаковы если существует отражение, повороты или их композиция приводящие друг к другу).

7. В треугольнике ABC с прямым углом С провели высоту CH. На отрезке CH как на основании построили два правильных треугольника ECH и FCH, притом точки E и A лежат по одну сторону, а точки F и B – по другую сторону относительно прямой CH. Точка G является пересечением прямых AF и CE. Докажите, что $AG \cdot BC = BG \cdot AC$.