

10 класс

10.1. Если сложить два двузначных числа, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем полученные числа сложить, то получится 111. Найдите эти числа.

Решение.

$$a + b + \frac{a}{b} + a - b = 111$$

$$2a + \frac{a}{b} = 111$$

$$\frac{a}{b}(2b + 1) = 37 \cdot 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 3 \\ 2b + 1 = 37 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 37 \\ 2b + 1 = 3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 1 \\ 2b + 1 = 111 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 111 \\ 2b + 1 = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a = 54 \\ b = 18 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = 37 \\ b = 1 - \text{однозначное число} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = 55 \\ b = 55 \end{array} \right. \text{ числа равны} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 111 \\ 2b = 0 \end{array} \right. \text{ запрещенная операция} \end{array} \right.$$

Ответ : $\begin{cases} a = 54 \\ b = 18 \end{cases}$

20	Правильное обоснованное решение
18	Правильное обоснованное решение, но не отброшены посторонние корни
10	Уравнение составлено, но решение найдено в результате подбора. При подборе не определены границы возможных значений
2	Решение не найдено, но уравнение составлено или приведен ответ без обоснования
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

10.2. Число $\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025}$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел x и $(x+1)$. Найдите x .

Ответ: $x = \underbrace{333\dots3}_{2025}$

Решение

$$\begin{aligned}\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025} &= \underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{1000\dots0}_{2025} + \underbrace{222\dots2}_{2025} = \underbrace{111\dots1}_{2025} \cdot 10^{2025} + 2 \cdot \underbrace{111\dots1}_{2025} = \left| A = \underbrace{111\dots1}_{2025} \right| = \\ &= A \cdot 10^{2025} + 2A = A \cdot (10^{2025} - 1 + 1) + 2A = A \cdot \left(\underbrace{999\dots9}_{2025} + 1 \right) + 2A = \\ &= A \cdot (9A + 1) + 2A = 9A^2 + 3A = A(9A + 3) = 3A(3A + 1) = |x = 3A| = \\ &= x(x+1) \\ x = 3A &= 3 \cdot \underbrace{111\dots1}_{2025} = \underbrace{333\dots3}_{2025}\end{aligned}$$

Критерии оценивания

20	Правильное обоснованное решение
15	Решение найдено, но нет обоснования закономерности, что если для чисел выполняются соотношения: $12=3 \times 4$, для $1122=33 \times 34$, то это будет выполняться для числа $\underbrace{111\dots1}_{2025}\underbrace{222\dots2}_{2025}$.
2	Есть продвижение
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют

10.3. Решите уравнение $[2x] - [x] = 5$, где $[x]$ – целая часть числа x .

$[x]$ - целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Ответ: $x \in [4,5; 5,5)$

Решение

Целой частью числа $[x]$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Пусть $[x] = n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то

$$[2x] - n = 5 \quad [2x] = 5 + n$$

$$\begin{cases} n+5 \leq 2x < n+5+1 \\ n \leq x < n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n+5}{2} \leq x < \frac{n+6}{2} \\ n \leq x < n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} n < \frac{n+6}{2} \\ n+1 > \frac{n+5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n < n+6 \\ 2n+2 > n+5 \end{cases} \quad \begin{cases} n < 6 \\ n > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 4 \\ n = 5 \end{cases}$$

1) Если $n=4$, то $\begin{cases} 4,5 \leq x < 5 \\ 4 \leq x < 5,5 \end{cases} \quad 4,5 \leq x < 5$

2) Если $n=5$, то $\begin{cases} 5 \leq x < 5,5 \\ 5 \leq x < 6 \end{cases} \quad 5 \leq x < 5,5$

$$\begin{cases} 4,5 \leq x < 5 \\ 5 \leq x < 5,5 \end{cases} \quad 4,5 \leq x < 5,5$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
18	Ошибка в ответе на границе промежутка: $4,5 < x < 5,5$ или $4,5 \leq x \leq 5,5$
10	Найдено решение только для промежутка $5 \leq x < 5,5$ или только для $4,5 \leq x \leq 5$
10	Получено решение методом подбора
2	Есть продвижение. Найден ответ $x=5$

10.4. Фирма "Рога и Копыта" открылась в понедельник, выпустив акции и обещая своим вкладчикам фантастические дивиденды. Стоимость одной акции каждый день возрастает в два раза. В понедельник, в первый день продажи акций, старуха Шапокляк, отстояв многочасовую очередь, вложила в фирму 200 тысяч рублей из своей пенсии, надеясь к концу недели получить 12 млн 600 тыс. рублей чистой прибыли. Найдите вероятность получения старухой Шапокляк этой суммы, если вероятность того, что лавочка не закроется, в день открытия составляла $1/10$ и каждый день уменьшается в 10 раз?

Ответ: 10^{-28}

Решение. Для того, чтобы в воскресенье старуха Шапокляк получила 12 млн.600 тыс. рублей чистой прибыли необходимо, чтобы фирма «Рога и копыта» не закрылась до воскресенья включительно. В понедельник эта вероятность равна $1/10$, во вторник – $1/100$, в среду $1/1000$, ..., в воскресенье – $1/10^7$.

Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что в i -ый день недели фирма не закрывается.

Вероятность указанного события найдем с помощью теоремы умножения для независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}(A_7)$$

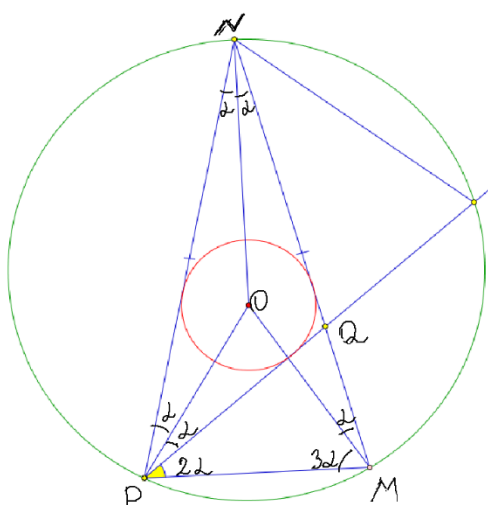
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^{28}}$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
10	Найдены вероятности событий, что фирма не закроется в каждый день недели.
2	Записан только ответ без объяснения
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют

10.5. Дан треугольник MNP, в котором проведена биссектриса PQ. Оказалось, что центр окружности, описанной около треугольника MNP совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник NPQ. Требуется найти углы треугольника.

Ответ: 36° , 72° , 72°



Решение. Пусть O – общий центр вписанной и описанной окружностей. Из условия следует, что NO и PO – биссектрисы углов MNP и NPQ и, кроме того, $MO=NO=PO$. Поэтому если $\angle MNO = \alpha$, то

$$\angle OMN = \alpha,$$

$$\angle OPN = \angle ONP = \alpha,$$

$$\angle NPQ = 2\alpha$$

(PQ – биссектриса). Отсюда

$\angle OMP = \angle OPM = 3\alpha$. Таким образом, сумма углов треугольника MNP равна 10α , откуда

$$\alpha = 18^\circ.$$

Критерии оценивания

20	Полностью правильное обоснованное решение
10	Правильно определены соотношения углов
2	Есть продвижение
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют