

11 класс

11.1. Даны три раствора кислоты разной концентрации. Из них составляют три смеси.

Первая смесь – из равных объёмов второго и третьего растворов.

Вторая смесь – из равных объёмов первого и третьего растворов.

Третья смесь – из равных объёмов первого и второго растворов.

Концентрации этих смесей находятся в отношении 7:6:3.

Определить, во сколько раз концентрация третьего раствора больше концентрации второго раствора.

Решение.

Пусть x – концентрация первого раствора, y – концентрация второго раствора, z – концентрация третьего раствора, и пусть для составления смесей взяты объёмы – 1 л.

	Объём раствора, л	концентрация	Объём чистого вещества, л
1 раствор	1	x	$\frac{x}{100}$
2 раствор	1	y	$\frac{y}{100}$
3 раствор	1	z	$\frac{z}{100}$
1 смесь	2	$(\frac{y}{100} + \frac{z}{100}) : 2 = \frac{y+z}{200}$	$\frac{y}{100} + \frac{z}{100}$
2 смесь	2	$(\frac{x}{100} + \frac{z}{100}) : 2 = \frac{x+z}{200}$	$\frac{x}{100} + \frac{z}{100}$
3 смесь	2	$(\frac{y}{100} + \frac{x}{100}) : 2 = \frac{y+x}{200}$	$\frac{y}{100} + \frac{x}{100}$

Тогда по условию $\frac{y+z}{200} : \frac{x+z}{200} : \frac{x+y}{200} = 7:6:3$. Отсюда

$$\begin{cases} 6(y+z)=7(x+z) \\ 3(y+z)=7(x+y) \end{cases}, \begin{cases} 7x-6y+z=0 \\ 7x+4y-3z=0 \end{cases}. \text{ Вычтем из второго первое уравнение,}$$

получим $10y = 4z$, т.е. $\frac{z}{y} = 2,5$.

Ответ. 2,5

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Решение проведено для частного случая.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.2. В треугольнике $tgA:tgB:tgC=1:2:3$. Найдите косинусы этих углов. В ответе укажите значение выражения:

$$4\sqrt{2}\cos A - 20\sqrt{5}\cos B + 18\sqrt{10}\cos C.$$

Решение.

Т.к. заданы углы треугольника, то $A + B + C = \pi$.

Следовательно, $A + B = \pi - C$.

Возьмем от обеих частей тангенс

$$tg(A + B) = tg(\pi - C).$$

С одной стороны, по формулам приведения

$$tg(\pi - C) = -tgC.$$

С другой стороны

$$tg(A + B) = \frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = -tgC$$

Тогда

$$\frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = -tgC.$$

$$tgA + tgB = -tgC + tgA \cdot tgB \cdot tgC,$$

$$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC. \quad (1)$$

По условию,

$$tgA : tgB = 1 : 2,$$

$$tgB = 2tgA, \quad (2)$$

$$tgA : tgC = 1 : 3,$$

$$tgC = 3tgA. \quad (3)$$

Пусть $tgA = t$.

Тогда, учитывая замену, и подставляя (2) и (3) в (1), получим $t + 2t + 3t = 6t^3$, или $t^3 - t = 0$, т.е. $t = 0$ или $t = \pm 1$.

Возвращаемся к прежней переменной

$$tgA = 0 \quad \text{или} \quad tgA = 1 \quad \text{или} \quad tgA = -1.$$

$$A = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad A = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad A = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Т.к. A – угол треугольника, то $A = \frac{\pi}{4}$ или $A = \frac{3\pi}{4}$.

Если $A = \frac{\pi}{4}$, то $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tgB = 2tgA = 2$, $\cos B = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 B}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$, замечаем, что $\cos B = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 B}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, учитывая знак тангенса.

Аналогично, $tgC = 3tgA = 3$ и $\cos C = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 C}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Случай $A = \frac{3\pi}{4}$ невозможен, т.к. если $\operatorname{tg} A = -1$, то $\operatorname{tg} B = 2\operatorname{tg} A = -2$, т.е. угол B – тупой, а в треугольнике не может быть более одного тупого угла.

Таким образом, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$$4\sqrt{2}\cos A - 20\sqrt{5}\cos B + 18\sqrt{10}\cos C = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 18\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = 2$$

Ответ. 2

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Рассмотрен частный случай либо решение проведено подбором возможных вариантов.

10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не рассмотрены все возможные случаи.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.3. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1:3, считая от вершины. Во сколько раз площадь исходного треугольника больше площади треугольника с вершинами в этих точках.

Решение.

Пусть ABC – данный треугольник, AA_1 , BB_1 , CC_1 его медианы и O – точка пересечения медиан. По свойству медиан $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$ и, следовательно

$$AO = \frac{2}{3}AA_1, BO = \frac{2}{3}BB_1, CO = \frac{2}{3}CC_1. \quad (1)$$

И пусть $M \in AA_1$, $N \in BB_1$, $K \in CC_1$, тогда по условию

$$AM : MA_1 = BN : NB_1 = CK : KC_1 = 1 : 3.$$

$$AM = \frac{1}{4} AA_1, BN = \frac{1}{4} BB_1, CK = \frac{1}{4} CC_1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) $AM : AO = BN : BO = CK : CO = 3 : 8.$

Следовательно, $MO : AO = NO : BO = KO : CO = 5 : 8.$

Таким образом, треугольники ABC и MNK – подобны. Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} = \frac{256}{100} = 2,56.$$

Ответ. 2,56

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. В работе присутствует обоснование, что треугольники подобны, однако правильный ответ не обоснован.

10 б. Решение содержит существенное продвижение, которое может привести к верному ответу, но не доведено до конца. (Например, найдено отношение $AM : AO = BN : BO = CK : CO = 3 : 8.$)

15 б. Решение содержит существенное продвижение, которое может привести к верному ответу, но не доведено до конца. (Например, найдено отношение $MO : AO = NO : BO = KO : CO = 5 : 8.$)

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.4. Найдите все простые числа p, q, r , являющиеся решением уравнения $2^{p+1} + q^2 = r^2$. Вычислите величину $F = 2q - 3p + 4r$. Если задача имеет несколько ответов для p, q, r , то укажите среднее значение F .

Решение.

Заметим, что числа q, r должны иметь одинаковую четность. Т.к. они простые, то они нечетные.

Перепишем условие в виде $2^{p+1} = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$.

Тогда $r - q = 2^m$, $r + q = 2^n$, $1 \leq m < n$ и $m + n = p + 1$.

Складывая равенства, получим $2r = 2^m + 2^n$, $r = 2^{m-1} + 2^{n-1}$.

Т.к. r – нечетное число, то $m=1$. Значит $r - q = 2$, $r + q = 2^p$.

Решая полученную систему, получим

$$r = 2^{p-1} + 1, \quad q = 2^{p-1} - 1.$$

Если $p=2$, то $q=1$, но 1 – не является простым числом. Следовательно, p – нечетное простое число. Поэтому $p - 1 = 2k$, $q = (2^k + 1)(2^k - 1)$.

Так как q – простое, то $k=1$. Следовательно, $q=3$, $r=5$, $p=3$. При этом это единственное решение. Следовательно, среднее значение F совпадает с F .

Тогда $F = 2q - 3p + 4r = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 17$.

Ответ. 17

Критерии

- 0 б. Приведен только ответ.
- 2 б. В работе присутствует наблюдение, что числа q, r нечетные, но дальнейших продвижений нет либо они неверны.
- 5 б. Ответ содержит лишь пример, само решение проведено подбором возможных вариантов.
- 10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не рассмотрены все возможные случаи.
- 10 б. Решение содержит существенное продвижение, но не обоснована единственность решения.
- 10 б. Верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.
- 15 б. Верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.
- 20 б. Приведено полное обоснованное решение.

11.5. На одной из двух параллельных прямых отмечено 8 точек, а на другой 11. Найдите A – число треугольников с вершинами в этих точках, B – число выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

В ответе укажите разность $B - A$.

Решение.

Для построения треугольников надо выбирать 2 точки на одной прямой и одну на другой, следовательно $A = 8 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_8^2 = 748$.

Для четырехугольников две вершины на одной и две вершины на другой прямой, т.е. $B = C_{11}^2 C_8^2 = 55 \cdot 28 = 1540$.

$$B - A = 1540 - 748 = 792.$$

Ответ. 792

Критерии

0 б. Приведен только ответ.

5 б. Допущены ошибки в преобразованиях или формулах при нахождении числа A либо числа B , однако число A либо B найдено верно, далее получен неверный ответ.

10 б. Верно найдено только A – число треугольников с вершинами в заданных точках.

10 б. Верно найдено только B – число выпуклых четырехугольников с вершинами в заданных точках.

10 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к неверному ответу.

15 б. Допущены вычислительные ошибки и/или верные преобразования выполнены частично, что приводит к верному ответу.

20 б. Приведено полное обоснованное решение.