Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (10 *баллов*) Петя сложил несколько идущих последовательно чётных чисел. Оказалось, что полученная сумма в **30** раз больше наибольшего слагаемого и в **90** раз больше наименьшего. Найдите, какие числа сложил Петя.

Ответ: 44, 46, 48, …, 132.

Решение. Пусть первое число n, а последнее n+2k. Всего чисел k+1. Числа образуют арифметическую прогрессию, сумма которой равна (n+k)(k+1). Получаем систему $\begin{cases}(n+k)(k+1)=30(n+2k),\\ (n+k)(k+1)=90n.\end{cases}$ Вычитая уравнения, получаем k=n. Тогда последнее уравнение примет вид $2k(k+1)=90k$, откуда k=44. Итак, искомые числа 44, 46,…, 132.

Критерии оценивания. Правильное обоснованное решение – 10 баллов. Получена верная система – 6 баллов. Задача решена, но имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами:

$$f_0(x)=2\sqrt{x},\ f_{n+1}(x)=\frac{4}{2-f_n(x)},\ n=0,1,2\ldots,\ \ x\in[4;9].$$

Найдите $f_{2023}(4)$.

Ответ: – 2.

Решение. Легко вычислить, что $f_3(x)=f_0(x)$, поэтому

$$f_{2023}(x)=f_1(x)=\frac{2}{1-\sqrt{x}}.$$

Тогда $f_{2023}(4)=-2.$

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится последовательность $f_0(4)=4,\ f_1(4)=-2,\ f_2(4)=1,\ f_3(4)=4\ \ldots$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение – 12 баллов. Ошибки в счёте – минус 1 балл. Найдено соотношение $f_3(x)=f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x)=f_1(x)$ – ещё 4 балла.

3. (15 *баллов*) Вершины ломаной $ABCDEFG$ имеют координаты

$A(-1;-7),\ B(2;5),\ C(3;-8),\ D(-3;4),\ E(5;-1),\ F(-4;-2),\ G(6;4)$.

Найдите сумму углов с вершинами в точках B, E, C, F, D.

Ответ: 135°.

Решение. Замкнутая ломаная $BCDEFB$ образует пятиконечную «звезду». Сумма углов в лучах этой звезды равна 180°.

Докажем, что сумма углов в лучах любой пятиконечной звезды $BCDEFB$ равна 180°. Пусть O – точка пересечения прямых BF и ED, угол между ними $BOD = \alpha$. Обозначим угол в луче той же буквой, что и вершину луча.

$$\angle E + \angle F = 180^\circ - \alpha = \angle OBD + \angle ODB.$$

Имеем:

$$180^\circ = \angle C + \angle CBD + \angle CDB = \angle C + (\angle B + \angle OBD) + (\angle D + \angle ODB) =$$

$$= \angle C + \angle B + \angle D + (\angle OBD + \angle ODB) = \angle C + \angle B + \angle D + \angle E + \angle F.$$

Другое доказательство. Пусть луч $\bar{a}$ совпадает с лучом BC. Повернем луч $\bar{a}$ до совмещения с лучом BF. Луч $\bar{a}$ повернется на угол $\angle B$. Затем повернем луч $\bar{a}$ (в новом положении) до совмещения с лучом EF. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle F$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F$. Затем снова повернем луч $\bar{a}$, теперь до совмещения с лучом ED. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle D$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F + \angle E$. Выполнив еще два аналогичных поворота, получим, что луч $\bar{a}$ совпадет с лучом CB, т.е. повернется с начала движения на 180° и, в то же время, на сумму углов $\angle B + \angle F + \angle E + \angle D + \angle C$.

Точка пересечения отрезков AB и FG – это точка $K(1;1)$.

Докажем это. Пусть $L(1;-2),\ M(6;-2)$. Тогда $\triangle KFL \sim \triangle GFM$, так как их катеты пропорциональны. Следовательно, $\angle KFL = \angle GFM$, поэтому $K \in FG$. Аналогично, $K \in AB$.

Другой способ. Уравнение прямой $AB: y = 4x - 3$. Уравнение прямой $FG: y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5}$. Решая систему из этих двух уравнений, получим координаты точки пересечения этих прямых: $(1;1)$.

Найдем длины сторон ΔBKG: $BK = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $BG = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$, $GK = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. Треугольник BKG равнобедренный и по обратной теореме Пифагора – прямоугольный.

Следовательно, угол $\angle BKG = 45^\circ$. Он внешний угол для ΔFKB и $\angle KFB + \angle KBF = 45^\circ$. Так как $\angle ABC = \angle FBC - \angle FBA,$ $\angle EFG = \angle EFB - \angle GFB$, то искомая сумма углов

$$\angle ABC + \angle EFG + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$
$$= \angle FBC + \angle EFB - \left(\angle FBA + \angle GFB\right) + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$
$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Замечание. Можно получить похожее решение, исходя из факта, что сумма углов в лучах любой семиконечной «звезды» тоже равна 180° (доказательство по сути не отличается от второго доказательства для пятиконечной). Так как угол $\angle BKG = 45^\circ$, то сумма двух углов семиконечной звезды с вершинами в точках A и G равна 45°.

Критерии оценивания. Полное решение 15 баллов. Если координаты точки K найдены из чертежа или угаданы – минус 2 балла. Если факт, что $\angle BKG = 45^\circ$, найден из чертежа или угадан – минус 3 балла. Если задача не решена, но показано, что сумма всех углов в лучах пяти- или семиконечной звезды равна 180°, то 8 баллов.

4. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он ехал на велосипеде и с какой скоростью?

Ответ: 5/7 часа; 35 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1\right) + \left(\frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2\right) + \left(\frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1; \quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2; \quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

5. (10 *баллов*) Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R=4 м. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a=2 м/с^2?

Ответ: ≈ 2 м/с.

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \frac{v^2}{2S} = \frac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$a_2 = \frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

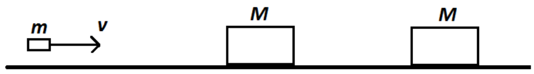
$v_{max} = \sqrt[4]{\frac{16\pi^2 R^2 a^2}{(16\pi^2+1)}}$. **(2 балла)**

В результате:

$v_{max} \approx 2{,}8$ м/с. **(1 балл)**

Ответ: ≈2,8 м/с.

6. (10 *баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нём горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m \ll M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$.

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv = (M+m)u = Mu$. **(2 балла)**

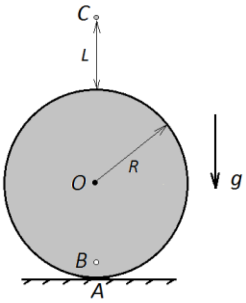
В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\frac{Mu^2}{2} = A_{\text{тр}} = 2\mu M g S$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Равномерно заряженный по объёму шар радиусом R закреплён на горизонтальной поверхности в точке A. Заряд шара Q. В точке C, которая располагается на расстоянии L от поверхности шара, парит заряженный шарик радиусом r и массой m. Его заряд q. Известно, что $r \ll R$. Определите ускорение шарика сразу после того, как в точке B удалили часть материала. Известно, что $AB=S$. Удалённый материал представляет собой шарик радиусом r. Точки A, B, C, O располагаются на одной вертикали. Ускорение свободного падения g.



Ответ: $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$.

Решение. В начальном состоянии для шарика: $F_э = mg$. **(2 балла)**

В конечном состоянии для шарика: $F_э - mg - F_{удал} = -ma$, **(2 балла)**

где $F_{удал} = k\frac{qq_{удал}}{(L+2R-S)^2}$. **(4 балла)**

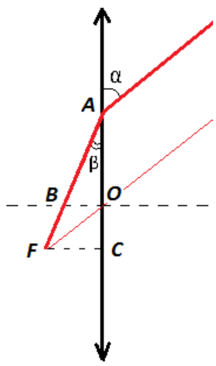
Удалённый заряд: $q_{удал} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$. **(4 балла)**

В итоге получаем $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$. **(3 балла)**

8. (15 *баллов*) Тонкий луч света падает на тонкую собирающую линзу на расстоянии x=10 см от её оптического центра. Угол между падающим лучом и плоскостью линзы α=45°, между преломлённым лучом и плоскостью линзы β=30°. Определите её фокусное расстояние.

Ответ: ≈13,7 см.

Решение. Параллельные лучи пересекаются в фокусе, поэтому F – фокус данной линзы. **(3 балла)**



В треугольнике OAF: угол FAO=30°, угол OFA=15°, угол AOF=135°. **(4 балла)**

Следовательно, $\frac{OF}{\sin 30°} = \frac{AO}{\sin 15°}$. **(4 балла)**

Получаем, что фокусное расстояние:

$FC = OF \sin 45° = AO\frac{\sin 30°}{\sin 15°}\sin 45° \approx 13{,}7$ см. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (10 *баллов*) Петя сложил несколько идущих последовательно нечётных чисел. Оказалось, что полученная сумма в **20** раз больше наибольшего слагаемого и в **60** раз больше наименьшего. Найдите, какие числа сложил Петя.

Ответ: 29, 31, 33, …, 87.

Решение. Пусть первое число n, а последнее $n+2k$. Всего чисел $k+1$. Числа образуют арифметическую прогрессию, сумма которой равна $(n+k)(k+1)$. Получаем систему $\begin{cases}(n+k)(k+1)=20(n+2k),\\ (n+k)(k+1)=60n.\end{cases}$ Вычитая уравнения, получаем $k=n$. Тогда последнее уравнение примет вид $2k(k+1)=60k$, откуда $k=29$. Итак, искомые числа 29, 31,…, 87.

Критерии оценивания. Получена верная система – 6 баллов, правильное обоснованное решение – 10 баллов; имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами:

$$f_0(x)=2\sqrt{x},\ f_{n+1}(x)=\frac{4}{2-f_n(x)},\ n=0,1,2\ldots,\ \ x\in[4;9].$$

Найдите $f_{2023}(9)$.

Ответ: – 1.

Решение. Легко вычислить, что $f_3(x)=f_0(x)$, поэтому

$$f_{2023}(x)=f_1(x)=\frac{2}{1-\sqrt{x}}.$$

Тогда $f_{2023}(9)=-1$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится последовательность $f_0(9)=6$, $f_1(9)=-1$, $f_2(9)=\frac{4}{3}$, $f_3(9)=6\ldots$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение – 12 баллов. Ошибки в счёте – минус 1 балл. Найдено соотношение $f_3(x)=f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x)=f_1(x)$ – ещё 4 балла.

3. (15 *баллов*) Вершины ломаной $ABCDEFG$ имеют координаты $A(0;-5)$, $B(3;7)$, $C(4;-6)$, $D(-2;6)$, $E(6;1)$, $F(-3;0)$, $G(7;6)$.

Найдите сумму углов с вершинами в точках B, E, C, F, D.

Ответ: 135°.

Решение. Замкнутая ломаная $BCDEFB$ образует пятиконечную «звезду». Сумма углов в лучах этой звезды равна 180°.

Докажем, что сумма углов в лучах любой пятиконечной звезды $BCDEFB$ равна 180°. Пусть O – точка пересечения прямых BF и ED, угол между ними $BOD = \alpha$. Обозначим угол в луче той же буквой, что и вершину луча.

$$\angle E + \angle F = 180^\circ - \alpha = \angle OBD + \angle ODB.$$

Поэтому

$$180^\circ = \angle C + \angle CBD + \angle CDB = \angle C + (\angle B + \angle OBD) + (\angle D + \angle ODB) =$$
$$= \angle C + \angle B + \angle D + (\angle OBD + \angle ODB) = \angle C + \angle B + \angle D + \angle E + \angle F.$$

Другое доказательство. Пусть луч $\bar{a}$ совпадает с лучом BC. Повернем луч $\bar{a}$ до совмещения с лучом BF. Луч $\bar{a}$ повернется на угол $\angle B$. Затем повернем луч $\bar{a}$ (в новом положении) до совмещения с лучом EF. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle F$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F$. Затем снова повернем луч $\bar{a}$, теперь до совмещения с лучом ED. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle D$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F + \angle E$. Выполнив еще два аналогичных поворота, получим, что луч $\bar{a}$ совпадет с лучом CB, т.е. повернется с начала движения на 180° и, в то же время, на сумму углов $\angle B + \angle F + \angle E + \angle D + \angle C$.

Точка пересечения отрезков AB и FG – это точка $K(2;3)$.

Докажем это. Пусть $L(2;0)$, $M(7;0)$. Тогда $\triangle KFL \backsim \triangle GFM$, так как их катеты пропорциональны. Следовательно, $\angle KFL = \angle GFM$, поэтому $K \in FG$. Аналогично, $K \in AB$.

Другой способ. Уравнение прямой $AB: y = 4x - 5$. Уравнение прямой $FG: y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}$. Решая систему из этих двух уравнений, получим координаты точки пересечения этих прямых: $(2;3)$.

Найдем длины сторон ΔBKG: $BK = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $BG = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$, $GK = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. Треугольник BKG равнобедренный и по обратной теореме Пифагора – прямоугольный.

Следовательно, угол $\angle BKG = 45^\circ$. Он внешний угол для ΔFKB и $\angle KFB + \angle KBF = 45^\circ$. Так как $\angle ABC = \angle FBC - \angle FBA,$ $\angle EFG = \angle EFB - \angle GFB$, то искомая сумма углов

$$\angle ABC + \angle EFG + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$

$$= \angle FBC + \angle EFB - \left(\angle FBA + \angle GFB\right) + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$

$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Замечание. Можно получить похожее решение, исходя из факта, что сумма углов в лучах любой семиконечной «звезды» тоже равна 180° (доказательство, по сути, не отличается от второго доказательства для пятиконечной). Так как угол $\angle BKG = 45^\circ$, то сумма двух углов семиконечной звезды с вершинами в точках A и G равна 45°.

Критерии оценивания. Полное решение 15 баллов. Если координаты точки K найдены из чертежа или угаданы – минус 2 балла. Если факт, что $\angle BKG = 45^\circ$, найден из чертежа или угадан – минус 3 балла. Если задача не решена, но показано, что сумма всех углов в лучах пяти- или семиконечной звезды равна 180°, то 8 баллов.

4. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он бежал и с какой скоростью?

Ответ: $2/7$ часа; 14 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1\right) + \left(\frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2\right) + \left(\frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1;\quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2;\quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

5. *(10 баллов)* Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R=5 м. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a=1 м/с^2?

Ответ: ≈2,23 м/с.

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \frac{v^2}{2S} = \frac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$a_2 = \frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

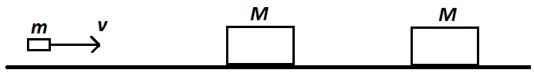
Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

$v_{max} = \sqrt[4]{\frac{16\pi^2 R^2 a^2}{(16\pi^2+1)}}$. **(2 балла)**

В результате:

$v_{max} \approx 2{,}23$ м/с. **(1 балл)**

6. (10 *баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m<<M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$.

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv = (M+m)u = Mu$. **(2 балла)**

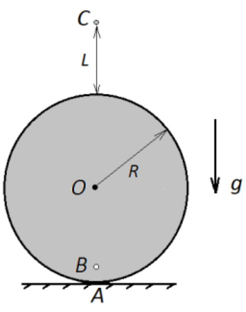
В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\frac{Mu^2}{2} = A_{\text{тр}} = 2\mu M g S$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Равномерно заряженный по объёму шар радиусом R закреплён на горизонтальной поверхности в точке A. Заряд шара Q. В точке C, которая располагается на расстоянии L от поверхности шара, парит заряженный шарик радиусом r и массой m. Его заряд q. Известно, что $r<<R$. Определите ускорение шарика сразу после того, как в точке B удалили часть материала. Известно, что AB=S. Удалённый материал представляет собой шарик радиусом r. Точки A, B, C, O располагаются на одной вертикали. Ускорение свободного падения g.



Ответ: $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$.

Решение. В начальном состоянии для шарика: $F_э = mg$. **(2 балла)**

В конечном состоянии для шарика: $F_э - mg - F_{удал} = -ma$, **(2 балла)**

где $F_{удал} = k\frac{qq_{удал}}{(L+2R-S)^2}$. **(4 балла)**

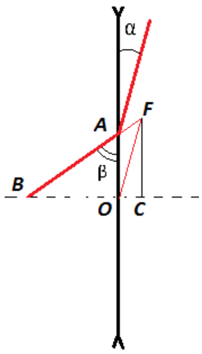
Удалённый заряд: $q_{удал} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$. **(4 балла)**

Получаем $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$. **(3 балла)**

8. (15 *баллов*) Тонкий луч света падает на тонкую рассеивающую линзу на расстоянии x=10 см от её оптического центра. Угол между падающим лучом и плоскостью линзы α=30°, между преломлённым лучом и плоскостью линзы β=45°. Определите её фокусное расстояние.

Ответ: ≈13,7 см.

Решение. Продолжения параллельных лучей пересекаются в фокусе, поэтому F – фокус данной линзы. **(3 балла)**



В треугольнике OAF: угол AOF=30°, угол OFA=15°, угол OAF=135°. **(4 балла)**

Следовательно, $\frac{OF}{\sin 135°} = \frac{OA}{\sin 15°}$. **(4 балла)**

Получаем, что фокусное расстояние:

$OC = OF\sin 30° = OA\frac{\sin 135°}{\sin 15°}\sin 30° \approx 13{,}7$ см. **(4 балла)**