



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Решите уравнение  $(x^4 - 2)(2^{\text{tg}x} - 1) + (3^{x^4} - 9)\text{tg}x = 0$ .

Ответ:  $\pm\sqrt[4]{2}; \pi n, n \in Z$ .

**Решение.** Функции  $y = 2^t$  и  $y = 3^t$  – возрастающие, следовательно, выражение  $3^{x^4} - 9 = 3^{x^4} - 3^2$  имеет такой же знак, как и  $x^4 - 2$ , а выражение  $2^{\text{tg}x} - 1 = 2^{\text{tg}x} - 2^0$  имеет такой же знак, как и  $\text{tg}x - 0 = \text{tg}x$ . Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Имеем  $\begin{cases} x^4 - 2 = 0, \\ \text{tg}x = 0. \end{cases}$

Решая эти уравнения, получаем ответ.

**Критерии оценивания.** За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 баллов) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл  $1/16$  часа, ехал на велосипеде и бежал по  $1/49$  часа, пройдя в сумме  $5/4$  км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он ехал на велосипеде и с какой скоростью?

Ответ:  $5/7$  часа; 35 км/час.

**Решение.** Пусть  $v_1, v_2, v_3$  – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует:  $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$  часа;  $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$  км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел  $x, y$  выполнено неравенство  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1 \right) + \left( \frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2 \right) + \left( \frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3 \right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{16}} + 2\sqrt{25 \cdot \frac{1}{49}} + 2\sqrt{4 \cdot \frac{1}{49}} = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{16}v_1; \quad \frac{25}{v_2} = \frac{1}{49}v_2; \quad \frac{4}{v_3} = \frac{1}{49}v_3$$

то есть  $v_1 = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $v_2 = 35 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $v_3 = 14 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ .

**Критерии оценивания.** Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 баллов) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x) = 3\sin x, \quad f_{n+1}(x) = \frac{9}{3-f_n(x)}$$

для любого целого  $n \geq 0$ . Найдите  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .

**Ответ:**  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$ .

**Решение.** Легко вычислить:  $f_3(x) = f_0(x)$ , поэтому  $f_{2023}(x) = f_1(x) = \frac{9}{3-3\sin x}$ . Следовательно,  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$ .

**Замечание.** Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}; \quad f_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6; \quad f_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3; \quad f_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}; \dots$$

**Критерии оценивания.** Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение  $f_3(x) = f_0(x)$  – 7 баллов, найдено равенство  $f_{2023}(x) = f_1(x)$  – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1 балл.

4. (13 баллов) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны  $\sqrt{61}$ ,  $\sqrt{52}$  и  $\sqrt{41}$ . Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

**Ответ:**  $\frac{60}{37}$ .

**Решение.** Обозначим основание пирамиды –  $ABC$ , вершину пирамиды –  $D$ , центр сферы –  $O$ , радиус сферы –  $r$ . Пусть  $AB=\sqrt{41}$ ,  $BC=\sqrt{61}$ ,  $AC=\sqrt{52}$ . Обозначим  $AD=x$ ,  $BD=y$ ,  $CD=z$ .

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABDO} + V_{BCDO} + V_{ACDO} = & (1) \\ &= \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot r + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot r + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot r = \\ &= \frac{1}{3} r \left( \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} yz + \frac{1}{2} xz \right). & (2) \end{aligned}$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} xyz. \quad (3)$$

Поэтому

$$r = \frac{xyz}{xy + yz + xz}. \quad (4)$$

Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  находятся из системы уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x^2 + z^2 = 52, \\ y^2 + z^2 = 61. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 77,$$

откуда  $x^2 = 16$ ,  $y^2 = 25$ ,  $z^2 = 36$ . Используя формулу (4), находим

$$r = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6} = \frac{60}{37}.$$

**Критерии оценивания.** Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4

балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 баллов) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью  $v_0$ . Первый камень брошен горизонтально с высоты  $H=40$  м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Ответ:**  $\approx 56,6$  м.

**Решение.** Уравнения движения первого камня:  $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$ . (2 балла)

$$x_1 = v_0 t = L, \quad (2 \text{ балла})$$

где  $L$  – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела:  $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ . (2 балла)

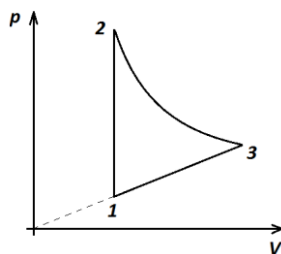
Так как камни встретились, то  $y_1 = y_2$ , (1 балл)

В результате:  $H = v_0 t = L$ . (1 балл)

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$$S = \sqrt{2H} = \sqrt{2} \cdot 40 \approx 56,6 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

6. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изохоры, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



**Ответ:** 8,8 %.

**Решение.** Так как в процессе 3-1 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа  $pV = \nu RT$  следует, что объём меняется в  $\sqrt{2}$  раз. (1 балл)

Модуль работы газа в процессе 3-1 равен площади под графиком:

$$A_{3-1} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_3 - p_1V_1 + p_3V_3 - p_3V_1). \quad (2 \text{ балла})$$

Так как:  $p_1V_3 = p_3V_1$ , (1 балл)

получаем:  $A_{3-1} = \frac{1}{2}(-p_1V_1 + p_3V_3) = \frac{1}{2}\nu R(T_3 - T_1)$ . (2 балла)

Количество теплоты в процессах:  $Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\vartheta RT_1$ . (2 балла)

$$Q_{23} = A_{23} = \vartheta RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}. \quad (2 \text{ балла})$$

$$Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) = 2\vartheta R(T_1 - T_3) = -2\vartheta RT_1. \quad (2 \text{ балла})$$

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{Q_{12} + Q_{23} - |Q_{31}|}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{\frac{3}{2}\vartheta RT_1 + 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2} - 2\vartheta RT_1}{\frac{3}{2}\vartheta RT_1 + 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}} = \frac{1,5 + 2 \ln\sqrt{2} - 2}{1,5 + 2 \ln\sqrt{2}}. \quad (2 \text{ балла})$$

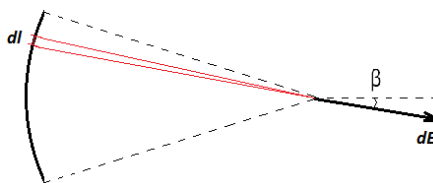
В результате:  $\eta = 0,088 = 8,8 \%$ . (1 балл)

7. (10 баллов) Дуга, центральный угол которой  $\alpha=30^\circ$ , вырезана из окружности радиусом  $R=50$  см. По дуге равномерно распределён заряд  $q=2$  мкКл. Определите напряжённость  $E$  электрического поля в центре кривизны этой дуги.

**Ответ:** 71 кВ/м.

**Решение.** Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной  $dl$ , на котором располагается заряд  $dq$ . Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$$dE = k \frac{dq}{R^2}. \quad (2 \text{ балла})$$



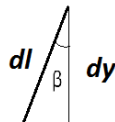
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$$dE \cos \beta = k \frac{dq}{R^2} \cos \beta. \quad (2 \text{ балла})$$

Заряд этого элемента  $dq = \frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl$ . (2 балла)

Получаем  $dE \cos \beta = k \frac{\frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl}{R^2} \cos \beta = k \frac{6q \cdot dl \cdot \cos \beta}{\pi R^3}$ . (1 балл)

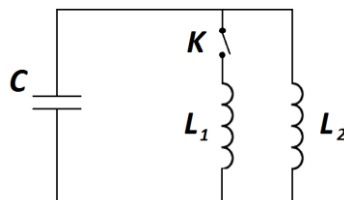
Обратим внимание, что  $dl \cdot \cos \beta = dy$ . (1 балл)



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$$E = k \frac{6q \cdot 2R \sin 15^\circ}{\pi R^3} = 12k \frac{q \sin 15^\circ}{\pi R^2} = 12 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \sin 15^\circ}{\pi \cdot 0,5^2} = 71\,180 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (2 \text{ балла})$$

8. (15 баллов) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью  $C=2$  мкФ и катушки индуктивностью  $L_2=1$  мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой  $I_{\max}=5$  мА. В тот момент времени, когда ток через катушку  $L_2$  максимален, замыкают ключ  $K$ . Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки  $L_1=2$  мГн.



**Ответ:** 90 мВ.

**Решение.** После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек:  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = 0$ . (1 балл)

Получаем, что  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}$ . (2 балла)

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые.

(2 балла)

Получаем  $L_2 I_{\max} = (L_1 + L_2) I$ . (3 балла)

Получили, что  $I = \frac{L_2 I_{\max}}{L_1 + L_2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3}$  А. (2 балла)

Закон сохранения энергии:  $\frac{L_2 I_{\max}^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_{\max}^2}{2}$ . (2 балла)

Получаем:

$$U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1 + L_2) I^2}{C}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 10^{-6}} - \frac{(2 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3}) \left(\frac{5}{3} \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 10^{-6}}} = 0,09 \text{ В} =$$

90 мВ.

**(3 балла)**



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Решите уравнение  $(x^3 - 3)(2^{\text{ctgx}} - 1) + (5^{x^3} - 125)\text{ctgx} = 0$ .

Ответ:  $\sqrt[3]{3}; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ .

**Решение.** Функции  $y = 2^t$  и  $y = 5^t$  – возрастающие, следовательно, выражение  $5^{x^3} - 125 = 5^{x^3} - 5^3$  имеет такой же знак, как и  $x^3 - 3$ , а выражение  $2^{\text{ctgx}} - 1 = 2^{\text{ctgx}} - 2^0$  имеет такой же знак, как и  $\text{ctgx} - 0 = \text{ctgx}$ . Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Получаем  $\begin{cases} x^3 - 3 = 0, \\ \text{ctgx} = 0. \end{cases}$  Решая эти уравнения, получаем ответ.

**Критерии оценивания.** За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 баллов) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл  $1/16$  часа, ехал на велосипеде и бежал по  $1/49$  часа, пройдя в сумме  $5/4$  км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он бежал и с какой скоростью?

Ответ:  $2/7$  часа; 14 км/час.

**Решение.** Пусть  $v_1, v_2, v_3$  – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует:  $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$  часа;  $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$  км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел  $x, y$  выполнено неравенство  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1 \right) + \left( \frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2 \right) + \left( \frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3 \right) \geq$$



$$\geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{16}} + 2\sqrt{25 \cdot \frac{1}{49}} + 2\sqrt{4 \cdot \frac{1}{49}} = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{16}v_1; \quad \frac{25}{v_2} = \frac{1}{49}v_2; \quad \frac{4}{v_3} = \frac{1}{49}v_3$$

то есть  $v_1 = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $v_2 = 35 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $v_3 = 14 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ .

**Критерии оценивания.** Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 баллов) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x) = 2\cos x, \quad f_{n+1}(x) = \frac{4}{2-f_n(x)}$$

для любого целого  $n \geq 0$ . Найдите  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

**Ответ:**  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ .

**Решение.** Легко вычислить:  $f_3(x) = f_0(x)$ , поэтому  $f_{2023}(x) = f_1(x) = \frac{4}{2-2\cos x}$ . Следовательно,  $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ .

**Замечание.** Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1; \quad f_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4; \quad f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2; \quad f_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1; \dots$$

**Критерии оценивания.** Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение  $f_3(x) = f_0(x)$  – 7 баллов, найдено равенство  $f_{2023}(x) = f_1(x)$  – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1 балл.

4. (13 баллов) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны  $\sqrt{85}$ ,  $\sqrt{58}$  и  $\sqrt{45}$ . Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ:  $\frac{14}{9}$ .

**Решение.** Обозначим основание пирамиды –  $ABC$ , вершину пирамиды –  $D$ , центр сферы –  $O$ , радиус сферы –  $r$ . Пусть  $AB=\sqrt{45}$ ,  $BC=\sqrt{85}$ ,  $AC=\sqrt{58}$ . Обозначим  $AD=x$ ,  $BD=y$ ,  $CD=z$ .

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABDO} + V_{BCDO} + V_{ACDO} = & (1) \\ &= \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot r + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot r + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot r = \\ &= \frac{1}{3} r \left( \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} yz + \frac{1}{2} xz \right). & (2) \end{aligned}$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} xyz. \quad (3)$$

Поэтому

$$r = \frac{xyz}{xy + yz + xz}. \quad (4)$$

Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  находятся из системы уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ x^2 + z^2 = 58, \\ y^2 + z^2 = 85. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим:  $x^2 + y^2 + z^2 = 94$ , откуда  $x^2 = 9$ ,  $y^2 = 36$ ,  $z^2 = 49$ . Используя формулу

$$(4), \text{ находим } r = \frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 6 \cdot 7} = \frac{14}{9}.$$

**Критерии оценивания.** Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4 балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 баллов) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью  $v_0$ . Первый камень брошен горизонтально с высоты  $H=50$  м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Ответ:**  $\approx 70,7$  м.

**Решение.** Уравнения движения первого камня:  $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$ . (2 балла)

$$x_1 = v_0 t = L, \quad (2 \text{ балла})$$

где  $L$  – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела:  $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ . (2 балла)

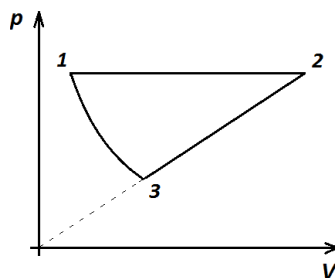
Так как камни встретились, то  $y_1 = y_2$ , (1 балл)

В результате:  $H = v_0 t = L$ . (1 балл)

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$$S = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \cdot 50 \approx 70,7 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

6. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изобары, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



**Ответ:** 6,1 %.

**Решение.** Так как в процессе 2-3 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа  $pV = \nu RT$  следует, что давление меняется в  $\sqrt{2}$  раз. (1 балл)

Модуль работы газа в процессе 2-3 равен площади под графиком:

$$A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_2 - V_3) = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_2V_3 + p_3V_2 - p_3V_3). \quad (2 \text{ балла})$$

Так как  $p_2V_3 = p_3V_2$ , (1 балл)

Получаем  $A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_3)$ . (2 балла)

Количество теплоты в процессах:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu RT_1. \quad (2 \text{ балла})$$

$$Q_{31} = A_{31} = \nu RT_1 \ln\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\nu RT_1 \ln\sqrt{2}. \quad (2 \text{ балла})$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \frac{1}{2}\nu R(T_3 - T_2) = 2\nu R(T_3 - T_2) = -2\nu RT_1. \quad (2 \text{ балла})$$

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{Q_{12} - |Q_{31} + Q_{23}|}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2}\nu RT_1 - \nu RT_1 \ln\sqrt{2} - 2\nu RT_1}{\frac{5}{2}\nu RT_1} = \frac{2,5 - \ln\sqrt{2} - 2}{2,5}. \quad (2 \text{ балла})$$

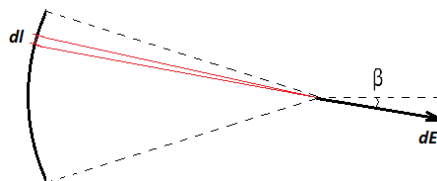
В результате:  $\eta = 0,061 = 6,1 \%$ . (1 балл)

7. (10 баллов) Дуга, центральный угол которой  $\alpha=60^\circ$ , вырезана из окружности радиусом  $R=40$  см. По дуге равномерно распределён заряд  $q=5$  мкКл. Определите напряжённость  $E$  электрического поля в центре кривизны этой дуги.

**Ответ:** 269 кВ/м.

**Решение.** Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной  $dl$ , на котором располагается заряд  $dq$ . Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$$dE = k \frac{dq}{R^2}. \quad (2 \text{ балла})$$



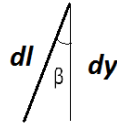
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$$dE \cos \beta = k \frac{dq}{R^2} \cos \beta. \quad (2 \text{ балла})$$

Заряд этого элемента:  $dq = \frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{3}} \cdot dl$ . (2 балла)

Получаем:  $dE \cos \beta = k \frac{\frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{3}} dl}{R^2} \cos \beta = k \frac{3q \cdot dl \cdot \cos \beta}{\pi R^3}$ . (1 балл)

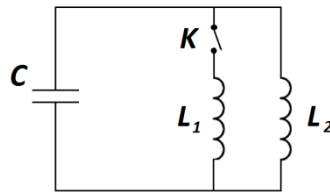
Обратим внимание, что:  $dl \cdot \cos \beta = dy$ . (1 балл)



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$$E = k \frac{3q \cdot 2R \sin 30^\circ}{\pi R^3} = 6k \frac{q \sin 30^\circ}{\pi R^2} = 6 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6} \sin 30^\circ}{\pi \cdot 0,4^2} = 268\,574 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (2 \text{ балла})$$

8. (15 баллов) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью  $C=1$  мкФ и катушки индуктивностью  $L_2=2$  мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой  $I_{\max}=10$  мА. В тот момент времени, когда ток через катушку  $L_2$  максимален, замыкают ключ  $K$ . Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки  $L_1=4$  мГн.



**Ответ:** 516 мВ.

**Решение.** После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек:  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = 0$ . (1 балл)

Получаем, что  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}$ . (2 балла)

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые. (2 балла)

Получаем:  $L_2 I_{\max} = (L_1 + L_2) I$ . (3 балла)

Получили, что  $I = \frac{L_2 I_{\max}}{L_1 + L_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-3}$  А. (2 балла)

Закон сохранения энергии  $\frac{L_2 I_{\max}^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_{\max}^2}{2}$ . (2 балла)

Получаем:

$$U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1 + L_2) I^2}{C}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} (10 \cdot 10^{-3})^2}{1 \cdot 10^{-6}} - \frac{(4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}) \left(\frac{10}{3} \cdot 10^{-3}\right)^2}{1 \cdot 10^{-6}}} = 0,516 \text{ В} = 516 \text{ мВ.}$$

**(3 балла)**