11 класс **Отборочный этап** **2022-2023**

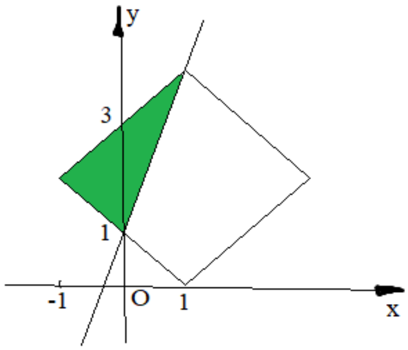
Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Найдите площадь треугольника, отсекаемого прямой $y = 3x + 1$ от фигуры, заданной неравенством $|x-1| + |y-2| \le 2$.

Ответ: 2.

Решение. Фигура, заданная данным неравенством, является квадратом.



Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$ (это можно найти по теореме Пифагора). Данная прямая проходит через вершину квадрата и отсекает треугольник с меньшим катетом равным $\sqrt{2}$, а больший катет – сторона квадрата. Тогда площадь отсекаемого прямоугольного треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$ кв.ед.

2. (*16 баллов*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\cos x.$$

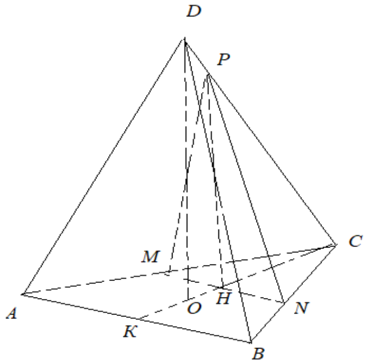
Ответ: 2,5.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x + 3$. Сделаем замену $\cos x = t, t \in [-1; 1]$. После этого задача сводится к нахождению наименьшего значения квадратичной функции $g(x) = 2t^2 + 2t + 3$ на отрезке $[-1; 1]$. Квадратичная функция задаёт на плоскости параболу (ветви которой направлены вверх), наименьшее значение достигается в вершине параболы, если абсцисса вершины принадлежит отрезку $[-1; 1]$. Абсцисса вершины параболы $t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$, следовательно, $g_{\text{наим}} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = 2{,}5$.

3. (*17 баллов*) Сечение правильной треугольной пирамиды проходит через среднюю линию основания и перпендикулярно основанию. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна **6**, а высота пирамиды равна **8**.

Ответ: 9.

Решение. Сечение *MNP* проходит через среднюю линию основания пирамиды *MN* и перпендикулярно основанию. Следовательно, высота *PH* треугольника *MNP* параллельна высоте пирамиды *DO*.



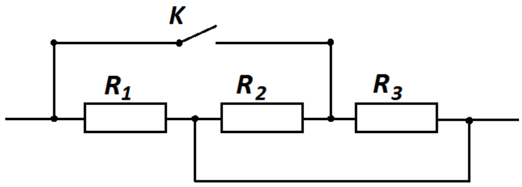
Имеем OC:OK=2:1, CH=HK, следовательно, CH:CO=3:4. Используя подобие треугольников DOC и PHC, получаем, что $PH = \frac{3}{4}DO = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Тогда площадь сечения равна $S = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ кв.ед.

4. (*15 баллов*) Одинаковые газы находятся в двух теплоизолированных сосудах с объёмами V_1=1 л и V_2=2 л. Давления газов p_1=2 атм и p_2=3 атм, а их температуры T_1=300 К и T_2=400 К соответственно. Газы смешали. Определите температуру, которая установится при этом в сосудах.

Ответ:≈369 К.

Решение. Суммарная внутренняя энергия газов до смешивания равна суммарной внутренней энергии после смешивания $U_1 + U_2 = U$, тогда
$\frac{i}{2}\vartheta_1 RT_1 + \frac{i}{2}\vartheta_2 RT_2 = \frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)RT$, где $\vartheta_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$, $\vartheta_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}$. В итоге получаем
$T = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}} \approx 369$ К.

5. (*20 баллов*) Известно, что номиналы резисторов на представленной схеме R_1=4 Ом, R_2=8 Ом и R_3=16 Ом. Определите, как и на сколько, изменится общее сопротивление цепи при замыкании ключа K.



Ответ: уменьшится на 1,7 Ом.

Решение. До замыкания ключа сопротивление схемы $R_0 = R_1 = 4$ Ом. После замыкания получаем параллельное соединение:

$$R_{\text{к}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 16}{4 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 8 \cdot 16} \approx 2{,}3 \text{ Ом}.$$

В результате $\Delta R = R_k - R_0 = -1{,}7$ Ом.

6. (*15 баллов*) Конденсатор ёмкостью C_1=10 мкФ заряжен до напряжения U_1=15 В. Второй конденсатор ёмкостью C_2=5 мкФ заряжен до напряжения U_2=10 В. Конденсаторы соединили разноимённо заряженными обкладками. Определите напряжение, которое установится на обкладках.

Ответ: 6,67 В.

Решение. Закон сохранения заряда $C_1U_1 - C_2U_2 = C_1U + C_2U$. Получаем:

$$U = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 15 - 5 \cdot 10}{10 + 5} = 6{,}67 \text{ В}.$$

11 класс **Отборочный этап** **2022-2023**

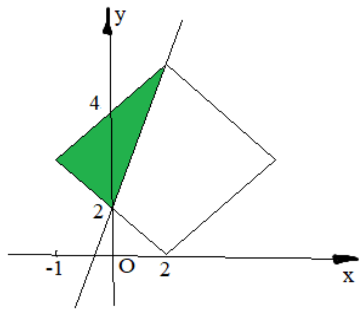
Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Найдите площадь треугольника, отсекаемого прямой $y = 2x + 2$ от фигуры, заданной неравенством $|x - 2| + |y - 3| \le 3$.

Ответ: 3.

Решение. Фигура, заданная данным неравенством, является квадратом.



Сторона квадрата равна $3\sqrt{2}$ (это значение можно найти по теореме Пифагора). Данная прямая проходит через вершину квадрата и отсекает треугольник с меньшим катетом равным $\sqrt{2}$, а больший катет – сторона квадрата. Тогда площадь отсекаемого прямоугольного треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3$ кв.ед.

2. (*16 баллов*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 7\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\sin x.$$

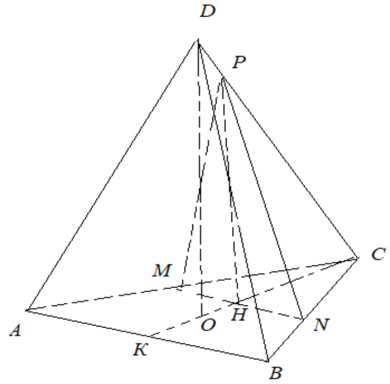
Ответ: 4,5.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем $f(x) = 2\sin^2 x + 2\cos x + 5$. Сделаем замену $\sin x = t,\ t \in [-1; 1]$. После этого задача сводится к нахождению наименьшего значения квадратичной функции $g(x) = 2t^2 + 2t + 5$ на отрезке $[-1; 1]$. Квадратичная функция задаёт на плоскости параболу (ветви которой направлены вверх), наименьшее значение достигается в вершине параболы, если абсцисса вершины принадлежит отрезку $[-1; 1]$. Абсцисса вершины параболы $t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$, следовательно, $g_{\text{наим}} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 + 5 = 4{,}5$.

3. (*17 баллов*) Сечение правильной треугольной пирамиды проходит через среднюю линию основания и перпендикулярно основанию. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна **8**, а высота пирамиды равна **12**.

Ответ: 18.

Решение. Сечение *MNP* проходит через среднюю линию основания пирамиды *MN* и перпендикулярно основанию. Следовательно, высота *PH* треугольника *MNP* параллельна высоте пирамиды *DO*.



Имеем OC:OK=2:1, CH=HK, следовательно, CH:CO=3:4. Используя подобие треугольников DOC и PHC, получаем, что $PH = \frac{3}{4}DO = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$. Тогда площадь сечения равна $S = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$ кв.ед.

4. (*15 баллов*) Одинаковые газы находятся в двух теплоизолированных сосудах с объёмами V_1=2 л и V_2=3 л. Давления газов p_1=3 атм и p_2=4 атм, а их температуры T_1=400 К и T_2=500 К соответственно. Газы смешали. Определите температуру, которая установится при этом в сосудах.

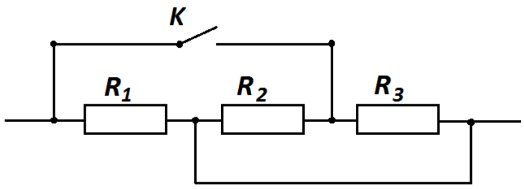
Ответ: ≈462 К.

Решение. Суммарная внутренняя энергия газов до смешивания равна суммарной внутренней энергии после смешивания $U_1 + U_2 = U$.

$$\frac{i}{2}\vartheta_1 RT_1 + \frac{i}{2}\vartheta_2 RT_2 = \frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)RT, \text{ где } \vartheta_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}, \vartheta_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}.$$

Тогда $T = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}} \approx 462$ К.

5. (*20 баллов*) Известно, что номиналы резисторов на представленной схеме R_1=1 Ом, R_2=2 Ом и R_3=4 Ом. Определите, как и на сколько, изменится общее сопротивление цепи при замыкании ключа K.



Ответ: уменьшится на 0,43 Ом.

Решение. До замыкания ключа сопротивление схемы $R_0 = R_1 = 1$ Ом. После замыкания получаем параллельное соединение:

$$R_к = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4} \approx 0{,}57 \text{ Ом}.$$

В результате $\Delta R = R_k - R_0 = -0{,}43$ Ом.

6. (*15 баллов*) Конденсатор ёмкостью C_1=20 мкФ заряжен до напряжения U_1=20 В. Второй конденсатор ёмкостью C_2=5 мкФ заряжен до напряжения U_2=5 В. Конденсаторы соединили разноимённо заряженными обкладками. Определите напряжение, которое установится на обкладках.

Ответ: 15 В.

Решение. Закон сохранения заряда: $C_1U_1 - C_2U_2 = C_1U + C_2U$. Получаем:

$$U = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} = \frac{20 \cdot 20 - 5 \cdot 5}{20 + 5} = 15 \text{ В}.$$