Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (13 *баллов*) Какое наименьшее количество участников могло быть в школьном драмкружке, если пятиклассников в нём было больше 25%, но меньше 35%, шестиклассников больше 30%, но меньше 40%, а семиклассников больше 35%, но меньше 45% (участников из других классов не было).

Ответ: 11. Пятиклассников – 3, шестиклассников – 4, семиклассников – 4.

Решение. Пусть искомое число участников

$$n = a + b + c, \qquad (*)$$

где a – число пятиклассников, b – число шестиклассников, c – число семиклассников. Заметим: $a < c$ и все три числа составляют от общего количества участников больше 0,25 и меньше 0,5 по условию. Рассмотрим все оставшиеся варианты суммы (*) с учётом этих замечаний.

5=1+2+2. Не выполнено условие для шестиклассников.

7=2+2+3. Не выполнено условие для шестиклассников.

8=2+3+3. Не выполнено условие для пятиклассников.

9=3+3+3. Не выполнено условие $a < c$.

10=3+3+4. Не выполнено условие для шестиклассников.

11=3+4+4. Выполнены все условия.

Критерии оценивания. Получен верный ответ на основе полного перебора без потери случаев – 13 баллов. Получен верный ответ, но при этом рассмотрены не все возможные случаи – 7 баллов. За верный ответ без объяснения 2 балла.

2. (12 *баллов*) В семье четверо детей разного возраста. Их суммарный возраст составляет 31 год. 4 года назад суммарный возраст всех детей семьи составлял 16 лет, 7 лет назад 8 лет, а 11 лет назад 1 год. Сколько лет детям в настоящий момент? (Возраст всегда выражается целым числом лет.)

Ответ: 3, 6, 10, 12 лет.

Решение. Начнём с конца. 11 лет назад ребёнок был один и ему был 1 год. Назовём его старшим ребёнком. 7 лет назад старшему было 5 лет, второму ребёнку – 3 года либо старшему – 5 лет, второму – 2 года, третьему – 1 год. Больше вариантов нет в силу того, что все дети разного возраста. 4 года назад старшему было 8 лет, второму 6 лет, третьему – 2 года либо старшему – 8 лет, второму – 5, третьему – 4 года. Но по условию суммарный возраст 16 лет, следовательно, второй вариант исключаем. Тогда в настоящее время старшему 12 лет, второму – 10 лет, третьему – 6 лет, а самому младшему – 3 года.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Имеются арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Не рассмотрен второй случай в решении минус 3 балла.

3. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 6, 7, 9, 9, 11, 12. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 2, 4, 5, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 6,\ x_1 + x_3 = 7,\ x_2 + x_3 = 9$. Отсюда $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$. Отсюда $x_4 = 12 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 6+7+9 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 11, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

4. (13 *баллов*) В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по три друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме трёх друзей. Могло ли быть проведено ровно 804 партии?

Ответ: Нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\frac{n(n-4)}{2}$. Действительно, каждый игрок проводит по n–4 партии. В произведении $n(n-4)$ каждая партия учитывается дважды, поэтому общее количество партий в два раза меньше.

Выясним, возможно ли, что $\frac{n(n-4)}{2} = 804$ или $n(n-4) = 1608$? Заметим, что число 1608=8$\cdot$ 201 делится на 8, но не делится на 16. Оба множителя либо чётные либо оба нечётные, но так как число 1608 чётное, то оба множителя чётные. Кроме того, один из множителей должен делиться на 4, иначе $n(n-4$ не будет делиться на 8. Но тогда и второй множитель делится на 4, а их произведение на 16. Противоречие.

Критерии оценивания. Обоснованно получен правильный ответ – 13 баллов. Правильно найдена формула для вычисления количества партий – 6 баллов. Сделан вывод, что оба множителя чётные – ещё 2 балла. Получено правильное противоречие ещё 5 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

5. (15 *баллов*) Плотностью тела ρ называют отношение массы тела m к его объёму V. Мерой массы, используемой в ювелирном деле, является карат (1 карат равен 0,2 грамма). Мерой длины, используемой во многих странах, является дюйм (1 дюйм равен 2,54 сантиметрам). Известно, что плотность алмаза составляет ρ=3,5 г/см^3. Переведите данное значение в караты на дюймы кубические.

Ответ: ≈287 карат/дюйм^3.

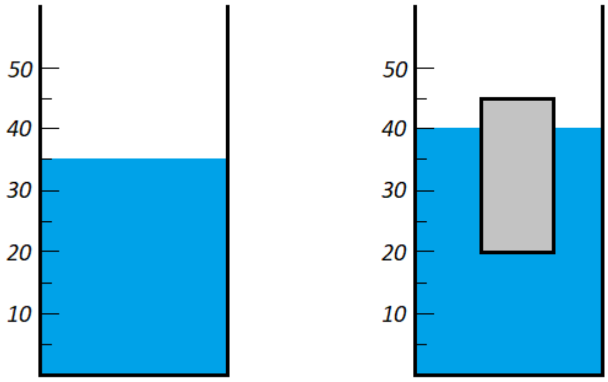
Решение. $1\text{ грамм} = \frac{1}{0{,}2}\text{ карат} = 5\text{ карат},$ **(5 баллов)**

$1\text{ см} = \frac{1}{2{,}54}\text{ дюйма}.$ **(5 баллов)**

Получаем: $\rho = 3{,}5\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 3{,}5\ \frac{5\text{ карат}}{\left(\frac{1}{2{,}54}\text{дюйма}\right)^3} = 3{,}5 \cdot 5 \cdot 2{,}54^3\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3} \approx 287\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3}.$

(5 баллов)

6. (15 *баллов*) В мерный стакан с водой погрузили пластмассовый цилиндр. Определите объём цилиндра. Разметка стакана приведена в миллилитрах.



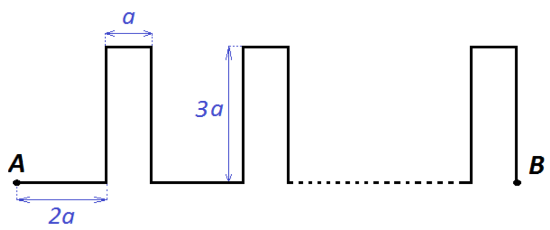
Ответ: 6,25 мл.

Решение. Объём погруженной части цилиндра $V_1 = (40 - 35) = 5$ мл.

(6 баллов)

Объём всего цилиндра: $V = \frac{45-20}{40-20} \cdot V_1 = 6{,}25$ мл. **(9 баллов)**

7. (10 *баллов*) Промышленный робот от точки A до точки B едет по заранее составленному алгоритму. На рисунке показана часть его повторяющейся траектории. Определите, во сколько раз быстрее он добрался бы от точки A до точки B, если бы двигался по прямой с втрое большей скоростью?



Ответ: в 9 раз.

Решение. Время, потраченное роботом на движение по заданной траектории:

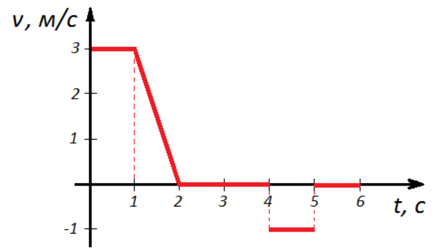
$t_1 = N\frac{2a+3a+a+3a}{v} = 9\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Время, потраченное роботом при движении по прямой:

$t_2 = N\frac{2a+a}{3v} = \frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Получаем, что робот доберётся в $\frac{t_1}{t_2} = 9$ раз быстрее. **(2 балла)**

8. (10 *баллов*) Тело движется вдоль оси О*x*. Зависимость скорости от времени показана на рисунке. Определите путь, пройденный телом за 6 секунд.



Ответ: 5,5 метров.

Решение. За первую секунду тело проехало 3 метра. **(2 балла)**

За вторую – 1,5 метра. **(2 балла)**

За пятую – 1 метр. **(2 балла)**

Итого, весь пройденный путь – 5,5 метров. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (13 *баллов*) Какое наименьшее количество участников могло быть в школьном драмкружке, если пятиклассников в нём было больше 22%, но меньше 27%, шестиклассников больше 25%, но меньше 35%, а семиклассников больше 35%, но меньше 45% (участников из других классов не было).

Ответ: 9. Пятиклассников – 2, шестиклассников – 3, семиклассников – 4.

Решение. Пусть искомое число участников

$$n = a + b + c, \qquad (*)$$

где a – число пятиклассников, b – число шестиклассников, c – число семиклассников. Заметим: $a < c$ и все три числа составляют от общего количества участников больше 0,2 и меньше 0,5 по условию. Рассмотрим все оставшиеся варианты суммы (*) с учётом этих замечаний.

5=1+2+2. Не выполнено условие для шестиклассников.

7=2+2+3. Не выполнено условие для пятиклассников.

8=2+3+3. Не выполнено условие для шестиклассников.

9=2+3+4. Выполнены все условия.

Критерии оценивания. Получен верный ответ на основе полного перебора без потери случаев – 13 баллов. Получен верный ответ, но при этом рассмотрены не все возможные случаи – 7 баллов.

2. (12 *баллов*) В семье четверо детей разного возраста. Их суммарный возраст составляет 33 года. 3 года назад суммарный возраст всех детей семьи составлял 22 года, 7 лет назад 11 лет, а 13 лет назад 1 год. Сколько лет детям в настоящий момент? (Возраст всегда выражается целым числом лет.)

Ответ: 2, 6, 11, 14 лет.

Решение. Начнём с конца. 13 лет назад ребёнок был один и ему был 1 год. Назовём его старшим ребёнком. 7 лет назад старшему было 7 лет, второму ребёнку – 4 года либо старшему – 7 лет, второму – 3 года, третьему – 1 год. Больше вариантов нет в силу того, что все дети разного возраста. 3 года назад старшему было 11 лет, второму 8 лет, третьему – 3 года либо старшему – 11 лет, второму – 7 лет, третьему – 5 лет. Но по условию суммарный возраст 22 года, следовательно, второй вариант исключаем. Тогда в настоящее время старшему 14 лет, второму – 11 лет, третьему – 6 лет, а самому младшему – 2 года.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Имеются арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Не рассмотрен второй случай в решении минус 3 балла.

3. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 7, 9, 10, 10, 11, 13. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 3, 4, 6, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 7,\ x_1 + x_3 = 9,\ x_2 + x_3 = 10$. Отсюда $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6$. Отсюда $x_4 = 13 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 7+9+10 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 13, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

4. (13 *баллов*) В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по три друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме трёх друзей. Могло ли быть проведено ровно 404 партии?

Ответ: Нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\frac{n(n-4)}{2}$**.** Действительно, каждый игрок проводит по n–4 партии. В произведении $n(n-4)$ каждая партия учитывается дважды, поэтому общее количество партий в два раза меньше.

Выясним, возможно ли, что $\frac{n(n-4)}{2} = 404$ или $n(n-4) = 808$? Заметим, что число 808=8$\cdot$ 101 делится на 8, но не делится на 16. Оба множителя либо чётные либо оба нечётные, но так как число 808 чётное, то оба множителя чётные. Кроме того, один из множителей должен делиться на 4, иначе $n(n-4$ не будет делиться на 8. Но тогда и второй множитель делится на 4, а их произведение на 16, получено противоречие.

Критерии оценивания. Обоснованно получен правильный ответ – 13 баллов. Правильно найдена формула для вычисления количества партий – 6 баллов. Сделан вывод, что оба множителя чётные ещё 2 балла. Получено правильное противоречие ещё 5 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

5. (15 *баллов*) Плотностью тела ρ называют отношение массы тела m к его объёму V. Мерой массы, используемой в ювелирном деле, является карат (1 карат равен 0,2 грамма). Мерой длины, используемой во многих странах, является дюйм (1 дюйм равен 2,54 сантиметрам). Известно, что плотность изумруда составляет ρ=2,7 г/см^3. Переведите данное значение в караты на дюймы кубические.

Ответ: ≈221 карат/дюйм^3.

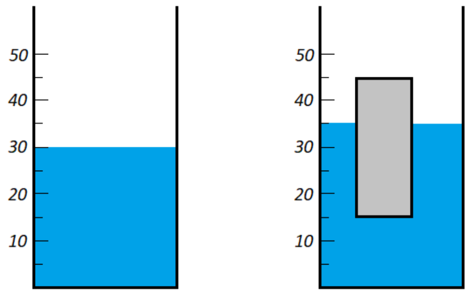
Решение. 1 грамм $= \frac{1}{0,2}$ карат $= 5$ карат, **(5 баллов)**

1 см $= \frac{1}{2,54}$ дюйма. **(5 баллов)**

Получаем: $\rho = 2,7\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 2,7\ \frac{5\ \text{карат}}{\left(\frac{1}{2,54}\text{дюйма}\right)^3} = 2,7 \cdot 5 \cdot 2,54^3\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3} \approx 221\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3}$.

(5 баллов)

6. (15 *баллов*) В мерный стакан с водой погрузили пластмассовый цилиндр. Определите объём цилиндра. Разметка стакана приведена в миллилитрах.

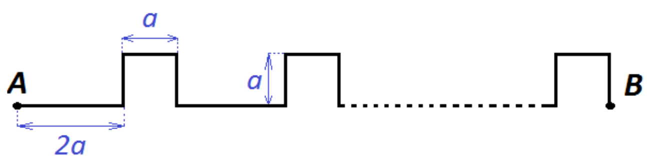


Ответ: 7,5 мл.

Решение. Объём погруженной части цилиндра $V_1 = (35 - 30) = 5$ мл.
(6 баллов)

Объём всего цилиндра: $V = \frac{45-15}{35-15} \cdot V_1 = 7,5$ мл. **(9 баллов)**

7. (10 *баллов*) Промышленный робот от точки A до точки B едет по заранее составленному алгоритму. На рисунке показана часть его повторяющейся траектории. Определите, во сколько раз быстрее он добрался бы от точки A до точки B, если бы двигался по прямой с вдвое большей скоростью?



Ответ: в 3,33 раза.

Решение. Время, потраченное роботом на движение по заданной траектории:

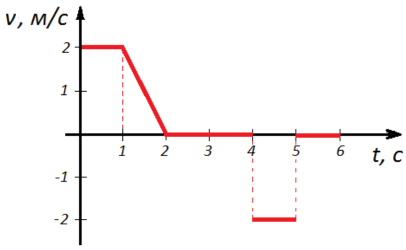
$t_1 = N\frac{2a+a+a+a}{v} = 5\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Время, потраченное роботом при движении по прямой:

$t_2 = N\frac{2a+a}{2v} = 1{,}5\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Получаем, что робот доберётся в $\frac{t_1}{t_2} = 3{,}33$ раза быстрее. **(2 балла)**

8. (10 *баллов*) Тело движется вдоль оси О*х*. Зависимость скорости от времени показана на рисунке. Определите путь, пройденный телом за 6 секунд.



Ответ: 5 метров.

Решение. За первую секунду тело проехало 2 метра. **(2 балла)**

За вторую – 1 метр. **(2 балла)**

За пятую – 2 метра. **(2 балла)**

Итого, весь пройденный путь – 5 метров. **(4 балла)**