7 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 6, 7, 9, 9, 11, 12. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 2, 4, 5, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1+x_2=6,\ x_1+x_3=7,\ x_2+x_3=9$. Отсюда $x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=5$. Отсюда $x_4=12-x_3=7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 6+7+9 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 11, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

2. (12 *баллов*) Найдите натуральное число n такое, что числа n+30 и n–17 являются квадратами других чисел.

Ответ: 546.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} n+30=k^2, \\ n-17=m^2. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получаем $k^2-m^2=47\ (*)$ или $(k-m)(k+m)=47$. Так как 47 – простое число, то возможны варианты $\begin{cases} k-m=\pm 1, \\ k+m=\pm 47, \end{cases}$ или наоборот $\begin{cases} k-m=\pm 47, \\ k+m=\pm 1, \end{cases}$ но для любого варианта $k=\pm 24$. Тогда $n=24^2-30=546$.
Проверка: $n-17=546-17=529=23^2$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Получено уравнение (*) ставить 6 баллов, получены все возможные варианты для множителей плюс 3 балла. Если ход решения верный, но имеются арифметические ошибки минус 2 балла.

3. (13 *баллов*) Суперкомпьютер Петя взял натуральное число $\boldsymbol{a}>\mathbf{2}$, нашёл площадь прямоугольника со сторонами $\boldsymbol{a}$–2 и $\boldsymbol{a}$+3 и отнял от результата $\boldsymbol{a}$. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только **2023** восьмерки, нули и **2023** тройки. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

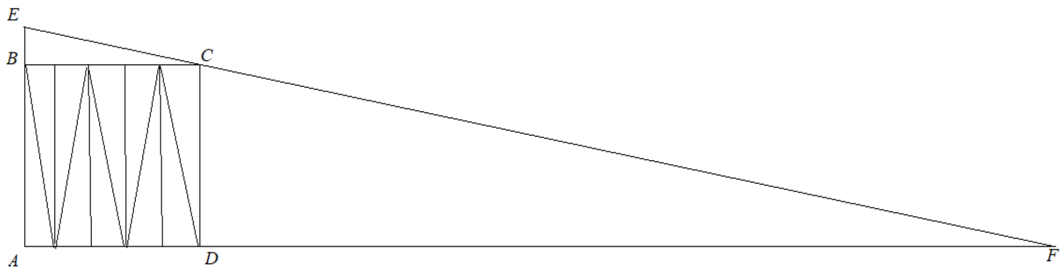
Ответ: Петя ошибся.

Решение. У полученного Петей числа $\boldsymbol{a}^2$–**6** (*) сумма цифр равна $2023 \cdot 8 + 2023 \cdot 3$. Это число при делении на 3 даёт остаток 2, следовательно, и $\boldsymbol{a}^2$–**6** при делении на 3 даёт остаток 2, то есть $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 дает остаток 2, но это невозможно. Действительно, если число $\boldsymbol{a}$ не делится на 3, то есть имеет вид $\boldsymbol{a = 3n + 1}$ либо $\boldsymbol{a = 3n + 2}$, то его квадрат при делении на 3 даёт в остатке 1.

Критерии оценивания. Получено, что число имеет вид (*) – 1 балл. Замечено, что данное число при делении на 3 даёт остаток 2, плюс 3 балла. Сделан вывод, что и число $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 даёт остаток 2, ещё плюс 2 балла. Получено противоречие плюс 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 *баллов*) Найдётся ли треугольная пицца, от которой можно последовательно отре́зать **11** одинаковых треугольных кусочков, причём каждый кусочек надо отреза́ть одним прямолинейным разрезом? Если да, нарисуйте эту треугольную пиццу и опишите, как её надо разрезать.

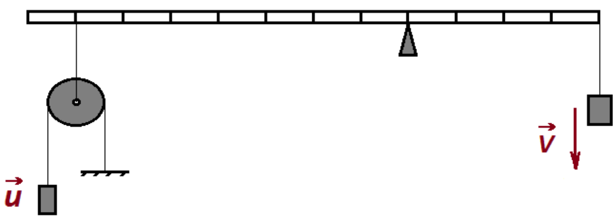
Ответ. Можно, смотри рисунок.



Решение (пример). Возьмём произвольный квадрат $ABCD$ и разрежем на 5 одинаковых прямоугольных (вертикальных) полос, и каждую полосу – на 2 треугольника по диагонали. Получим 10 одинаковых треугольников. Еще один такой же треугольник BEC пристроим сверху над квадратом. Прямые EC и AD продолжим до пересечения в точке F. Треугольник AEF – искомая «пицца» (см. рис.). Отрезаем кусочки так: сначала сверху треугольник $BEC,$ а затем слева направо еще 10 треугольников.

Критерии оценивания. Любое правильное решение – 13 баллов. Приведён пример на 5 кусочков – 3 балла.

5. (10 *баллов*) Определите направление и значение скорости левого груза u, если скорость правого груза v=1 м/с. Нити нерастяжимые и невесомые, рычаг жёсткий.



Ответ: 3,5 м/с; вверх.

Решение. Скорость центра блока направлена вверх и равна:

$v_c = \frac{7}{4}v = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. **(4 балла)**

Получаем: $u = 2v_c = 2\cdot\frac{7}{4} = 3{,}5\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. **(4 балла)**

Скорость левого груза направлена вверх. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) Каждый день из дома на работу Иван Ивановича отвозит служебная машина. Однажды Иван Иванович решил пройтись пешком и вышел из дома на час раньше обычного. По дороге он встретил служебную машину, и остаток пути доехал на ней. В результате он приехал на работу на 10 минут раньше обычного времени. Сколько времени Иван Иванович шёл пешком?

Ответ: 55 минут.

Решение. Так как Иван Иванович сэкономил своим походом водителю 10 минут, то автомобиль проезжает от дома Иван Ивановича до места встречи за 5 минут. **(3 балла)**

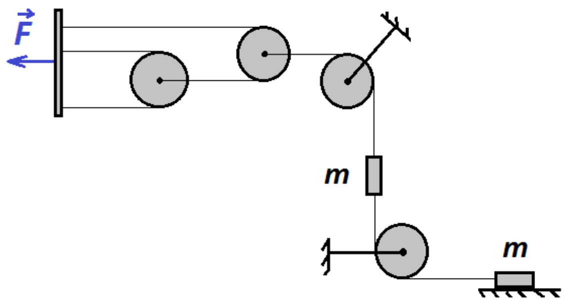
Получаем: $uT = 5v$, (1) **(2 балла)**

где u – скорость Иван Ивановича, v – скорость автомобиля, T – время, которое Иван Иванович шёл пешком. Расстояние от дома Иван Ивановича до места работы: $s = vt$, (2) **(2 балла)**

а с другой стороны: $s = uT + v(t - T + 50)$. (3) **(4 балла)**

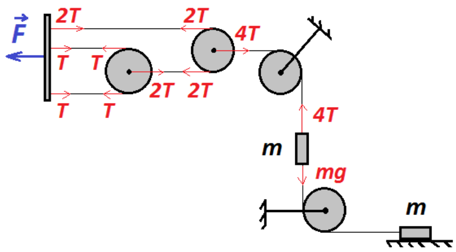
Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получаем: $T = 55$ минут. **(4 балла)**

7. (10 *баллов*) Определите силу F, которую необходимо приложить к пластине, чтобы сдвинуть с места груз массой m=2 кг, лежащий на горизонтальной гладкой поверхности. Все блоки гладкие и невесомые. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.



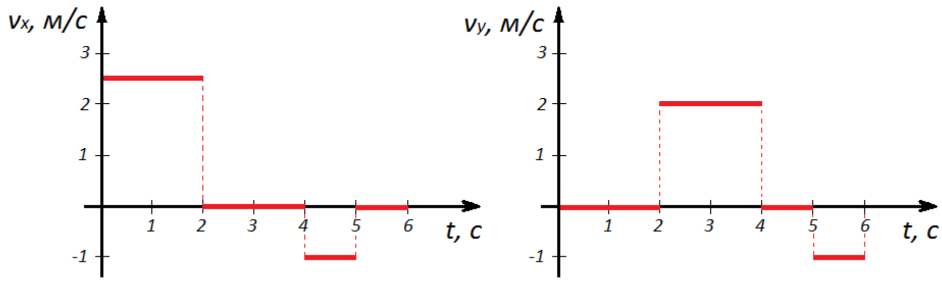
Ответ: 20 Н.

Решение. Расставим силы, действующие в данной системе: **(6 баллов)**



Получаем: $F = 4T = mg = 2 \cdot 10 = 20$ Н. **(4 балла)**

8. (15 *баллов*) Тело едет по горизонтальной плоскости. На графиках приведены зависимости проекций скорости вдоль осей О*x* и О*y* от времени. Определите кратчайшее расстояние между начальной и конечной точками.



Ответ: 5 метров.

Решение. Тело, двигаясь вдоль оси О*x*, проехало за первые две секунды 5 метров, потом две секунды координата не изменялась, и за пятую секунду проехало ещё 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*x* составило Δ*X*=4 м. **(5 баллов)**

Тело, двигаясь вдоль оси О*y*, первые две секунды было неподвижно, за следующие две секунды проехало 4 метра, затем одну секунду опять стояло, и за последнюю секунду проехало 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*y* составило Δ*У*=3 м. **(5 баллов)**

В результате, от начальной точки тело уехало на:

$\Delta S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ метров. **(5 баллов)**

Замечание. Данный результат можно было получить с помощью графика *X*-*Y*, изобразив смещения Δ*X* и Δ*У* (соблюдая масштаб), и измерив расстояние между начальной и конечной точками линейкой. При наличии верного ответа, данный способ также оценивается максимальным баллом.

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 7, 9, 10, 10, 11, 13. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 3, 4, 6, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 7,\ x_1 + x_3 = 9,\ x_2 + x_3 = 10$. Отсюда $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6$. Отсюда $x_4 = 13 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 7+9+10 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 13, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

2. (12 *баллов*) Найдите натуральное число *n* такое, что числа *n*+15 и *n*–14 являются квадратами других чисел.

Ответ: 210.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} n+15 = k^2, \\ n-14 = m^2. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получаем $k^2 - m^2 = 29\ (*)$ или $(k-m)(k+m) = 29$. Так как 29 – простое число, то возможны варианты $\begin{cases} k-m = \pm 1, \\ k+m = \pm 29, \end{cases}$ или наоборот $\begin{cases} k-m = \pm 29, \\ k+m = \pm 1, \end{cases}$ но для любого варианта k=± 15. Тогда $n = 15^2 - 15 = 210$.

Проверка: $n - 14 = 210 - 14 = 196 = 14^2$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Получено уравнение (*) ставить 6 баллов, получены все возможные варианты для множителей плюс 3 балла. Если ход решения верный, но имеются арифметические ошибки минус 2 балла.

3. (13 *баллов*) Суперкомпьютер Петя взял натуральное число ***a*>3**, нашёл площадь прямоугольника со сторонами ***a*–3** и ***a*+4** и отнял от результата ***a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только **2023** восьмерки, нули и **2023** тройки. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

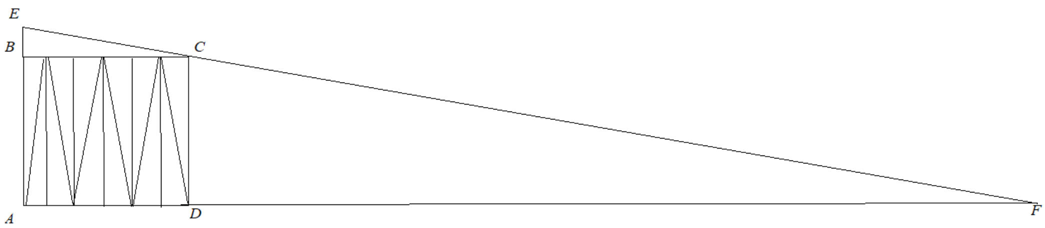
Ответ: Петя ошибся.

Решение. У полученного Петей числа $\boldsymbol{a}^2$–12 (*) сумма цифр равна $2023 \cdot 8 + 2023 \cdot 3$. Это число при делении на 3 даёт остаток 2, следовательно, и $\boldsymbol{a}^2$**–12** при делении на 3 даёт остаток 2, то есть $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 дает остаток 2, но это невозможно. Действительно, если число $\boldsymbol{a}$ не делится на 3, то есть имеет вид $\boldsymbol{a = 3n + 1}$ либо $\boldsymbol{a = 3n + 2}$, то его квадрат при делении на 3 даёт в остатке 1.

Критерии оценивания. Получено, что число имеет вид (*) – 1 балл. Замечено, что данное число при делении на 3 даёт остаток 2, плюс 3 балла. Сделан вывод, что и число $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 даёт остаток 2, ещё плюс 2 балла. Получено противоречие плюс 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 *баллов*) Найдётся ли треугольная пицца, от которой можно последовательно отре́зать **13** одинаковых треугольных кусочков, причём каждый кусочек надо отреза́ть одним прямолинейным разрезом? Если да, нарисуйте эту треугольную пиццу и опишите, как её надо разрезать.

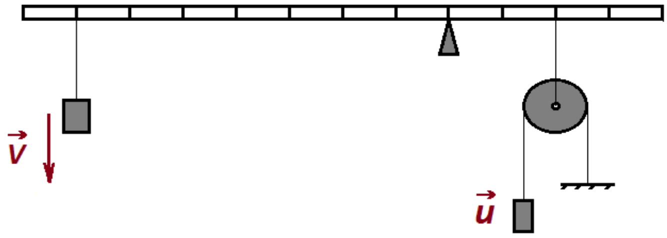
Ответ. Можно, смотри рисунок.



Решение (пример). Возьмём произвольный квадрат $ABCD$ и разрежем на 6 одинаковых прямоугольных (вертикальных) полос, и каждую полосу – на 2 треугольника по диагонали. Получим 12 одинаковых треугольников. Ещё один такой же треугольник BEC пристроим сверху над квадратом. Прямые EC и AD продолжим до пересечения в точке F. Треугольник AEF – искомая «пицца» (см. рис.). Отрезаем кусочки так: сначала сверху треугольник $BEC,$ а затем слева направо еще 12 треугольников.

Критерии оценивания. Любое правильное решение – 13 баллов. Приведён пример на 5 кусочков – 3 балла.

5. (10 *баллов*) Определите направление и значение скорости правого груза u, если скорость левого груза v=0,5 м/с. Нити нерастяжимые и невесомые, рычаг жёсткий.



Ответ: 0,29 м/с; вверх.

Решение. Скорость центра блока направлена вверх и равна:

$v_c = \frac{2}{7}v = \frac{2}{7}\cdot 0{,}5 = \frac{1}{7}$ м/с. **(4 балла)**

Получаем: $u = 2v_c = 2\cdot\frac{1}{7} = 0{,}29$ м/с. **(4 балла)**

Скорость правого груза направлена вверх. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) Каждый день из дома на работу Иван Ивановича отвозит служебная машина. Однажды Иван Иванович решил пройтись пешком и вышел из дома на полтора часа раньше обычного. По дороге он встретил служебную машину, и остаток пути доехал на ней. В результате он приехал на работу на 20 минут раньше обычного времени. Сколько времени Иван Иванович шёл пешком?

Ответ: 80 минут.

Решение. Так как Иван Иванович сэкономил своим походом водителю 20 минут, то автомобиль проезжает от дома Иван Ивановича до места встречи за 10 минут. **(3 балла)**

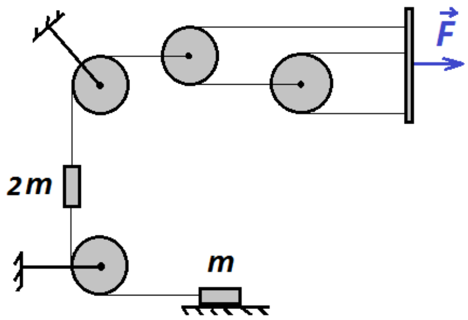
Получаем: $uT = 10v$, (1) **(2 балла)**

где u – скорость Иван Ивановича, v – скорость автомобиля, T – время, которое Иван Иванович шёл пешком. Расстояние от дома Иван Ивановича до места работы: $s = vt$, (2) **(2 балла)**

а с другой стороны: $s = uT + v(t - T + 70)$. (3) **(4 балла)**

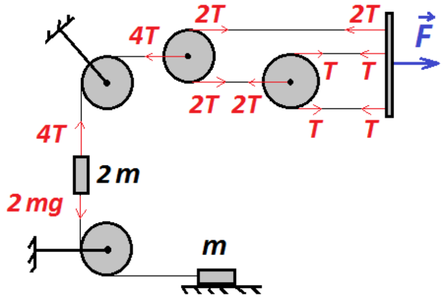
Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получаем $T = 80$ минут. **(4 балла)**

7. (10 *баллов*) Определите силу F, которую необходимо приложить к пластине, чтобы сдвинуть с места груз массой m=3 кг, лежащий на горизонтальной гладкой поверхности. Все блоки гладкие и невесомые. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.



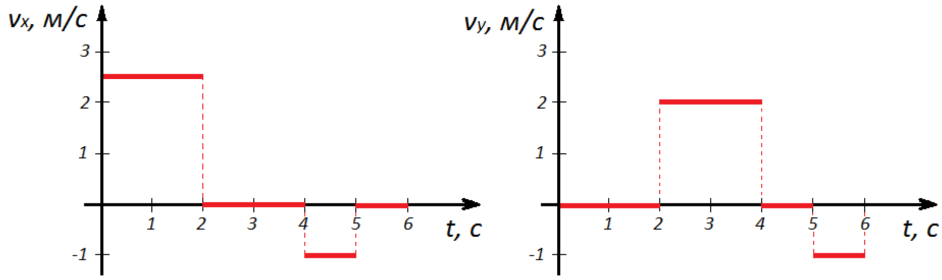
Ответ: 60 Н.

Решение. Расставим силы, действующие в данной системе: **(6 баллов)**



Получаем: $F = 4T = 2mg = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$ Н. **(4 балла)**

8. (15 *баллов*) Тело едет по горизонтальной плоскости. На графиках приведены зависимости проекций скорости вдоль осей О*x* и О*y* от времени. Определите кратчайшее расстояние между начальной и конечной точками.



Ответ: 5 метров.

Решение. Тело, двигаясь вдоль оси О*x*, проехало за первые две секунды 5 метров, потом две секунды координата не изменялась, и за пятую секунду проехало еще 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*x* составило ΔX=4 м. **(5 баллов)**

Тело, двигаясь вдоль оси О*y*, первые две секунды было неподвижно, за следующие две секунды проехало 4 метра, затем одну секунду опять стояло, и за последнюю секунду проехало 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*y* составило ΔY=3 м. **(5 баллов)**

В результате, от начальной точки тело уехало на:

$\Delta S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ метров. **(5 баллов)**

Замечание. Данный результат можно было получить с помощью графика *X*-*Y*, изобразив смещения ΔX и ΔY (соблюдая масштаб), и измерив расстояние между начальной и конечной точками линейкой. При наличии верного ответа, данный способ также оценивается максимальным баллом.