1. (12 *баллов*) Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $3p + q = 2023$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

Ответ: Все графики пересекаются в точке (3;2032).

Решение. Пусть x=3. Тогда $y = 9 + 3p + q = 2032$.

Критерии оценивания. Правильное решение 12 баллов.

2. (13 *баллов*) В зале пол имеет размеры 4×5 м^2, а высота потолка 4 м. На потолке в одном углу сидит муха Маша, а в противоположном углу потолка – паук Петя. Маша направилась пешком в гости к Пете по кратчайшему маршруту, но с заходом на пол. Найдите длину пройденного ею пути.

Ответ: $\sqrt{145}$ м.

Решение. Пусть муха сидит в вершине M, паук сидит в вершине $П$ (Рис 1.).

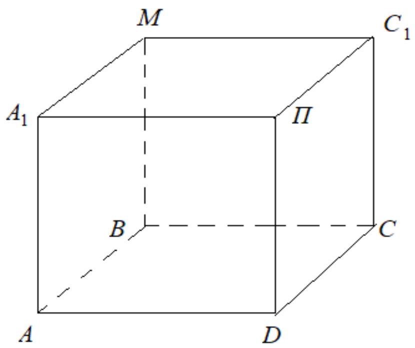


Рис.1.

Существует 4 выбора пути у Маши.

Маша может начать путь с грани (стены) BMC_1C, пройти по полу и закончить путешествие по стене $DAA_1П$. Тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.2.).

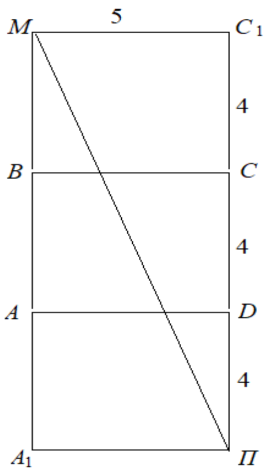


Рис.2.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ м (теорема Пифагора).

Во втором случае Маша может начать путь с грани BMA_1A и тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.3.).

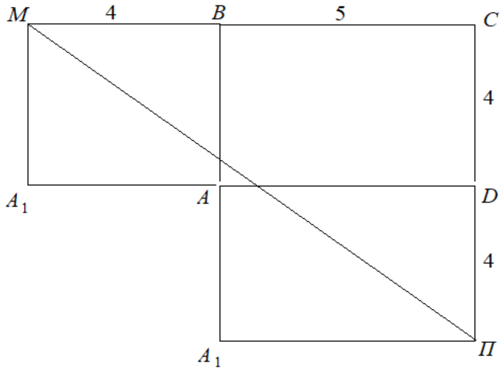


Рис.3.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}$ м.

В третьем случае Маша начнёт, как и в первом, со стены BMC_1C, но закончит движение по стене $DПC_1C$. В этом случае длина пути равна, как и во втором случае, $\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}$ м.

В четвёртом случае Маша начнёт, как и во втором, со стены BMA_1A, а закончит по грани $DПC_1C$. Длина пути в этом случае $\sqrt{4^2+13^2}=\sqrt{185}$ м.

Кратчайший путь Маши $\sqrt{145}$ м.

Критерии оценивания. Правильное полное решение – 13 баллов. Предложен не кратчайший маршрут (один из приведённых в решении), но правильно найдена его длина – 6 баллов. Если предложен маршрут, не являющийся отрезком прямой на какой-либо развертке, и объявлен кратчайшим, то 0 баллов за задачу. Выбран правильный маршрут, но не обосновано, почему он кратчайший, при правильном ответе – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

3. (12 *баллов*) Имеются четыре гири различного веса. Катя попарно взвешивает гири. В результате получилось 1800, 1970, 2110, 2330 и 2500 граммов. Сколько граммов весит шестой вариант взвешивания?

Ответ: 2190.

Решение. Пусть $x,\ y,\ z,\ t$ – вес каждой гири. Тогда попарные взвешивания будут составлять $x+y$, $x+z$, $x+t$, $y+z$, $y+t$, $z+t$ грамм. Существуют три пары данных чисел: 1) $x+y$ и $z+t$, 2) $x+z$ и $y+t$, 3) $x+t$ и $y+z$, – с одинаковым весом $x+y+z+t$. Найдём пары с одинаковой суммой: $1800+2500=1970+2330=4300$. Заметим, что других пар данных чисел с одинаковой суммой нет. Тогда шестой вариант взвешивания: $4300-2110=2190$.

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Если участник заметил, что три пары из шести чисел – суммарных весов двух гирь, в сумме дают вес всех гирь, и поэтому должны быть одинаковы, ставить 7 баллов. Найден суммарный вес всех гирь – ещё 2 балла. Замечено, что других пар данных чисел с одинаковой суммой, кроме найденных, нет – еще 2 балла. Арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

4. (13 *баллов*) По кругу стоят 16 человек: каждый из них либо правдивый (он всегда говорит правду), либо лжец (он всегда лжёт). Все сказали, что оба соседа у них – лжецы. Какое наибольшее количество лжецов может быть в этом круге?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с правдивым могут стоять только лжецы. Три лжеца подряд стоять не могут, поэтому между двумя любыми ближайшими правдивыми один или два лжеца. Тогда, если правдивых 5 или меньше, в промежутках между ними могут стоять в общей сложности не более 10 лжецов, то всего не более 15 человек. Получено противоречие. Следовательно, правдивых не меньше 6, а лжецов не больше 10. Пример на 10 лжецов легко приводится.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Построен пример – 3 балла. Доказана оценка – 9 баллов. Названа, но не обоснована верная оценка в результате рассмотрения примеров 2 балла.

5. (15 *баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой m=50 г. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_{п}$=0,9 г/см^3, плотность солёного льда $\rho_{с}$=0,95 г/см^3, плотность пресной воды $\rho_{пв}$=1 г/см^3, плотность солёной воды $\rho_{св}$=1,03 г/см^3. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: ≈2,63 см^3.

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{п} g V_1, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{с} g V_2, , \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_2 – весь объём солёного льда.

Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана:

$V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}\right) \cdot \frac{\rho_п}{\rho_{пв}} \approx 2{,}63\ см^3$. **(4 балла)**

6. (10 *баллов*) Зимой, при температуре окружающего воздуха $t_о$=–10 ^OC, каждый квадратный метр озера отдаёт в воздух 200 кДж тепла в час. Оцените через какое время после начала образования льда, на поверхность водоёма сможет выйти рыбак, если безопасная толщина льда составляет 10 см? Температура воды $t_в$=0°С. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, его удельная теплоёмкость 2100 Дж/кг·°С, плотность льда 900 кг/м^3. Скорость теплоотдачи считать постоянной.

Ответ: ≈153,2 часа.

Решение. Внутри образовавшегося льда температура линейно меняется от 0°С в глубине до –10°С на поверхности. То есть можно считать, что отдаваемое тепло получается за счёт кристаллизации льда и его последующего охлаждения в среднем до –5°С. **(3 балла)**

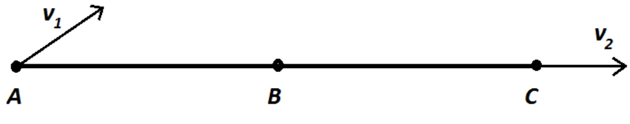
Масса квадратного метра льда, способного выдержать человека:

$m = \rho V = \rho S h = 900 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 90$ кг. **(2 балла)**

Получаем $200\ 000 = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{t}$. **(3 балла)**

В результате $t = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{200\ 000} = \frac{330\ 000 \cdot 90 + 2100 \cdot 90 \cdot 5}{200\ 000} = 153{,}225$ часа. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня v_1=5 м/с, а скорость другого v_2=4 м/с, и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: ≈4,3 м/с.

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

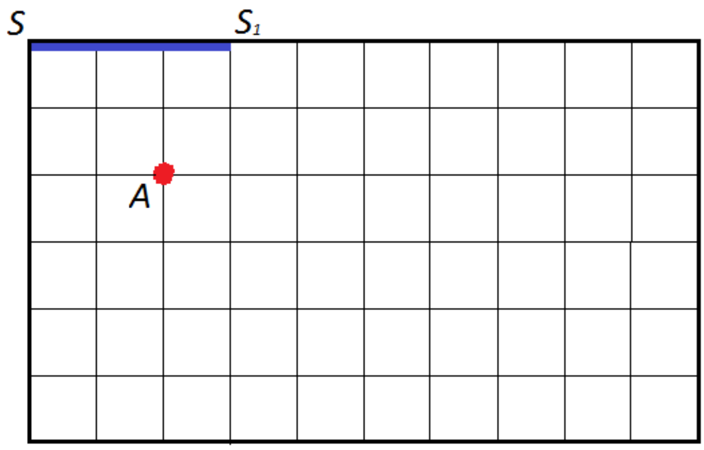
Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ А} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 3$ м/с. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$$v_{\text{верт B}} = \frac{1}{2} v_{\text{верт A}} = 1{,}5 \text{ м/с}.$$ **(4 балла)**

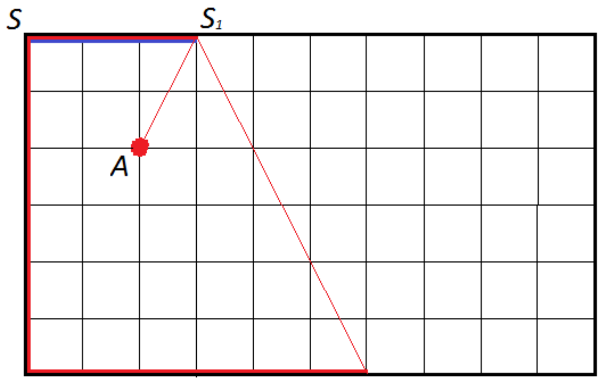
Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{верт B}}^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} \approx 4{,}3 \text{ м/с}.$ **(3 балла)**

8. (10 *баллов*) В прямоугольной комнате находится точечный источник света A, свет от которого падает только на плоское зеркало SS_1, которое занимает часть одной из стен в полную высоту комнаты. Определите долю стен, которые неосвещены.



Ответ: ≈0,53.

Решение: Угол падения равен углу отражения: **(2 балла)**



(3 балла)

Получаем, что отношение неосвещённой площади стен к общей площади: $\frac{17}{32} \approx 0{,}53$ **(5 баллов)**

1. (12 *баллов*) Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $-2p + q = 2023$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

Ответ: Все графики пересекаются в точке (–2;2027).

Решение. Пусть x= –2. Тогда $y = 4 - 2p + q = 2027$.

Критерии оценивания. Правильное решение 12 баллов.

2. (13 *баллов*) В зале пол имеет размеры 7×8 м^2, а высота потолка 4 м. На потолке в одном углу сидит муха Маша, а в противоположном углу потолка – паук Петя. Маша направилась пешком в гости к Пете по кратчайшему маршруту, но с заходом на пол. Найдите длину пройденного ею пути.

Ответ: $\sqrt{265}$ м.

Решение. Пусть муха сидит в вершине *M*, паук сидит в вершине *П* (Рис 1.).

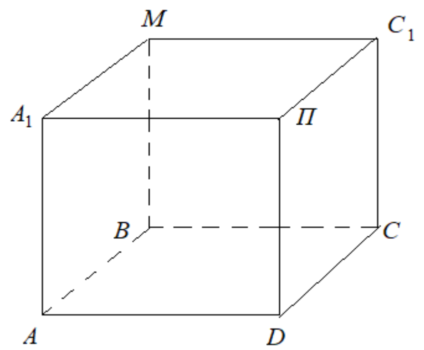


Рис.1.

Существует 4 выбора пути у Маши.

Маша может начать путь с грани (стены) BMC_1C, пройти по полу и закончить путешествие по стене $DAA_1П$. Тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.2.).

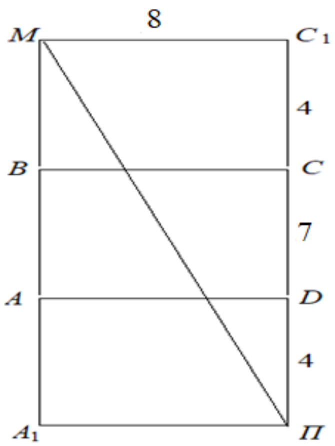


Рис.2.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17$ м (теорема Пифагора).

Во втором случае Маша может начать путь с грани BMA_1A и тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.3.).

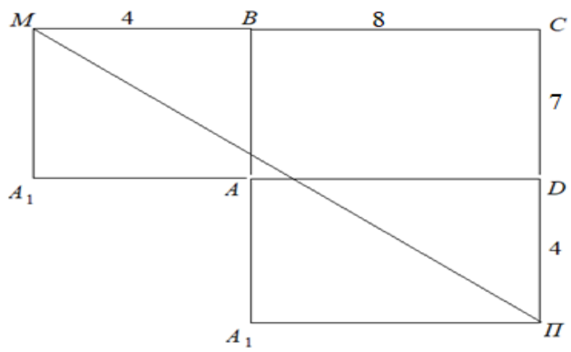


Рис.3.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{11^2+12^2}=\sqrt{265}$ м.

В третьем случае Маша начнёт, как и в первом, со стены BMC_1C, но закончит движение по стене $ДПC_1C$. В этом случае длина пути равна, как и во втором случае, $\sqrt{11^2+12^2}=\sqrt{265}$ м.

В четвёртом случае Маша начнёт, как и во втором, со стены BMA_1A, а закончит по грани $ДПC_1C$. Длина пути в этом случае $\sqrt{7^2+16^2}=\sqrt{305}$ м.

Кратчайший путь Маши $\sqrt{265}$ м.

Критерии оценивания. Правильное полное решение – 13 баллов. Предложен не кратчайший маршрут (один из приведенных в решении), но правильно найдена его длина – 6 баллов. Если предложен маршрут, не являющийся отрезком прямой на какой-либо развёртке, и объявлен кратчайшим, то 0 баллов за задачу. Выбран правильный маршрут, но не обосновано, почему он кратчайший, при правильном ответе – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

3. (12 *баллов*) Имеются четыре гири различного веса. Катя попарно взвешивает гири. В результате получилось 1700, 1870, 2110, 2330 и 2500 граммов. Сколько граммов весит шестой вариант взвешивания?

Ответ: 2090.

Решение. Пусть $x,\ y,\ z,\ t$ – вес каждой гири. Тогда попарные взвешивания будут составлять $x+y,\ x+z,\ x+t,\ y+z,\ y+t,\ z+t$ грамм. Существуют три пары: 1) $x+y$ и $z+t$, 2) $x+z$ и 3) $y+t$, $x+t$ и $y+z$ с одинаковым весом $x+y+z+t$. Найдём пары с одинаковой суммой: $1700+2500=$

$1870 + 2330$. Заметим, что других пар данных чисел с одинаковой суммой нет. Тогда шестой вариант взвешивания: $4200 - 2110 = 2090$.

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Если участник заметил, что три пары из шести чисел – суммарных весов двух гирь, в сумме дают вес всех гирь, и поэтому должны быть одинаковы, ставить 7 баллов. Найден суммарный вес всех гирь – ещё 2 балла. Замечено, что других пар данных чисел с одинаковой суммой, кроме найденных, нет – еще 2 балла. Арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

4. (13 *баллов*) По кругу стоят 17 человек: каждый из них либо правдивый (он всегда говорит правду), либо лжец (он всегда лжёт). Все сказали, что оба соседа у них – лжецы. Какое наибольшее количество лжецов может быть в этом круге?

Ответ: 11.

Решение. Рядом с правдивым могут стоять только лжецы. Три лжеца подряд стоять не могут, поэтому между двумя любыми ближайшими правдивыми один или два лжеца. Тогда, если правдивых 5 или меньше, в промежутках между ними могут стоять в общей сложности не более 10 лжецов, то всего не более 15 человек. Получено противоречие. Тогда правдивых не меньше 6, а лжецов не больше 12, но всего 17 человек, следовательно, лжецов 11. Пример на 11 лжецов легко приводится.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Построен пример – 3 балла. Доказана оценка – 9 баллов. Названа, но не обоснована верная оценка в результате рассмотрения примеров 2 балла.

5. (15 *баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой m=100 г. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_{п}$=0,9 г/см^3, плотность солёного льда $\rho_{с}$=0,95 г/см^3, плотность пресной воды $\rho_{пв}$=1 г/см^3, плотность солёной воды $\rho_{св}$=1,03 г/см^3. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: ≈5,26 см^3.

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{п} g V_1,$$ **(4 балла)**

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{с} g V_2, ,$$ **(4 балла)**

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лед при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$.

Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана:

$V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}\right) \cdot \frac{\rho_п}{\rho_{пв}} \approx 5{,}26 \text{ см}^3$. **(4 балла)**

6. (10 *баллов*) Зимой, при температуре окружающего воздуха $t_о$=–20°С, каждый квадратный метр озера отдаёт в воздух 300 кДж тепла в час. Оцените через какое время после начала образования льда, на поверхность водоёма сможет выйти рыбак, если безопасная толщина льда составляет 10 см? Температура воды $t_в$=0°С. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, его удельная теплоёмкость 2100 Дж/кг·°С, плотность льда 900 кг/м^3. Скорость теплоотдачи считать постоянной.

Ответ: 105,3 часа.

Решение. Внутри образовавшегося льда температура линейно меняется от 0°С в глубине до –20°С на поверхности. То есть можно считать, что отдаваемое тепло получается за счет кристаллизации льда и его последующего охлаждения в среднем до –10°С. **(3 балла)**

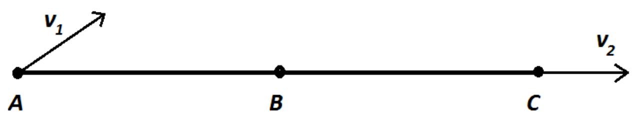
Масса квадратного метра льда, способного выдержать человека:

$m = \rho V = \rho S h = 900 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 90$ кг. **(2 балла)**

Получаем $300\,000 = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{t}$. **(3 балла)**

В результате: $t = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{300\,000} = \frac{330\,000 \cdot 90 + 2100 \cdot 90 \cdot 10}{300\,000} = 105{,}3$ часа. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня v_1=10 м/с, а скорость другого v_2=6 м/с, и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: ≈7,2 м/с.

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

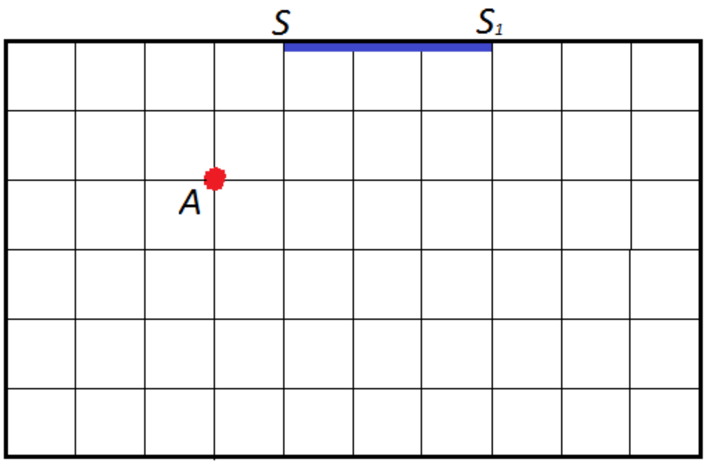
Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{\text{верт A}} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 8$ м/с. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$v_{\text{верт B}} = \frac{1}{2} v_{\text{верт A}} = 4$ м/с. **(4 балла)**

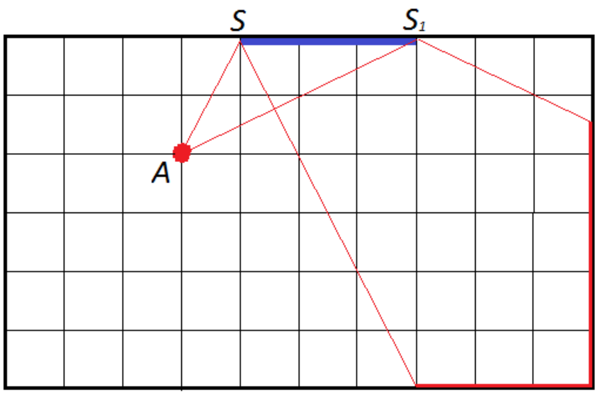
Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{верт B}}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7{,}2$ м/с. **(3 балла)**

8. (10 *баллов*) В прямоугольной комнате находится точечный источник света A, свет от которого падает только на плоское зеркало SS_1, которое занимает часть одной из стен в полную высоту комнаты. Определите долю стен, которые неосвещены.



Ответ: ≈0,67.

Решение. Угол падения равен углу отражения: **(2 балла)**



(3 балла)

Получаем, что отношение неосвещенной площади стен к общей площади: $\frac{21{,}5}{32} \approx 0{,}67$ **(5 баллов)**