



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (16 баллов) Решите уравнение $x - 5 = \frac{3 \cdot |x-2|}{x-2}$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их сумму.

Ответ: 8.

Решение. В уравнении есть ограничение на переменную $x \neq 2$. Раскрываем модуль: при $x > 2$ $x - 5 = 3$, $x = 8$. При $x < 2$ $x - 5 = -3$, $x = 2$ – посторонний корень.

2. (17 баллов) Дан прямоугольник $ABCD$. На двух сторонах прямоугольника выбраны различные точки, пять точек на AB и шесть – на BC . Сколько существует различных треугольников с вершинами в выбранных точках?

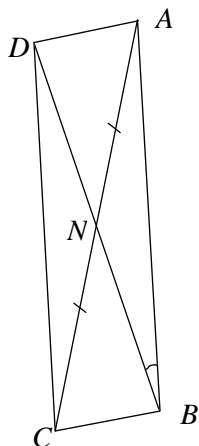
Ответ: 135.

Решение. Для составления треугольника надо выбрать две точки на одной стороне и одну точку на другой. Имеем: 5 способов выбрать первую точку на AB , 4 способа – вторую и так как при перестановке вершин треугольник не изменится, то делим $5 \cdot 4$ на 2. Итак, $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способов выбрать две точки на стороне AB , 6 способов на стороне BC . Всего $10 \cdot 6 = 60$ способов. Аналогично, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способов выбрать две точки на стороне BC и 5 способов одну точку на стороне AB . Всего $15 \cdot 5 = 75$ способов. Следовательно, существует 135 различных треугольников с вершинами в выбранных точках.

3. (17 баллов) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N , так что $AN=NC$. Сторона AB в два раза больше BN и угол между AB и BN равен 50° . Найдите угол ABC .

Ответ: 115.

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$.



Тогда, $DB = 2NB = AB$. Следовательно, треугольник ABD – равнобедренный и $\angle ADB = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$. $\angle ADB = \angle DBA$ (накрест лежащие при параллельных прямых). В итоге получаем, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$.

4. (15 баллов) Предмет состоит из двух деталей. Плотность одной из них 2700 кг/м^3 . Кроме того известно, что эта деталь занимает 25% от объёма всего предмета и её масса равна 40% от всей массы. Определите плотность второй детали.

Ответ: 1350 кг/м^3 .

Решение. Из условия имеем $m_1 = 0,4m$, и $V_1 = 0,25V$. Получаем $m_1 = 0,6m$, и $V_1 = 0,75V$. Плотность первой детали $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{0,4m}{0,25V}$. Плотность второй детали $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{0,6m}{0,75V} = \frac{0,6}{0,75} \cdot \frac{0,25}{0,4} \rho_1 = 1350 \text{ кг/м}^3$.

5. (20 баллов) Определите угол между часовой и минутной стрелками, в тот момент времени, когда они показывают 13 часов 20 минут.

Ответ: 80° .

Решение. Минутная стрелка отошла от двенадцати на $\frac{20}{60} \cdot 360 = 120^\circ$. Часовая стрелка отошла от двенадцати на $\frac{1}{12} \cdot 360 + \frac{20}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360 = 40^\circ$. Угол между стрелками $120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

6. (15 баллов) В воду, взятую при температуре 80°C , опустили металлический брусок, температура которого 20°C . После установления теплового равновесия температура оказалась равной 60°C . После этого, не вынимая из воды первый брусок, в воду опустили еще один такой же брусок, температура которого тоже 20°C . Какой теперь станет температура воды после установления теплового равновесия?

Ответ: 50°C .

Решение. Уравнение теплового баланса в первом случае $c_B m_B 20 = c_6 m_6 40$.

Уравнение теплового баланса во втором случае

$$c_B m_B (60 - t) + c_6 m_6 (60 - t) = c_6 m_6 (t - 20).$$

Получаем $c_6 m_6 \cdot 2 \cdot (60 - t) + c_6 m_6 (60 - t) = c_6 m_6 (t - 20)$. В итоге $t = 50^\circ\text{C}$.



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (16 баллов) Решите уравнение $x - 7 = \frac{4 \cdot |x-3|}{x-3}$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их сумму.

Ответ: 11.

Решение. В уравнении есть ограничение на переменную $x \neq 3$. Раскрываем модуль: при $x > 3$ $x - 7 = 4$, $x = 11$. При $x < 3$ $x - 7 = -4$, $x = 3$ – посторонний корень.

2. (17 баллов) Дан прямоугольник $ABCD$. На двух сторонах прямоугольника выбраны различные точки, шесть точек на AB и семь – на BC . Сколько существует различных треугольников с вершинами в выбранных точках?

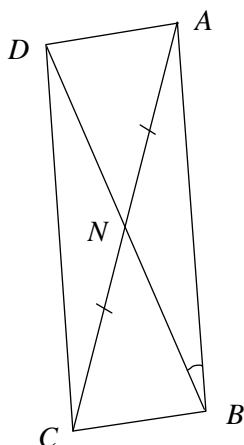
Ответ: 231.

Решение. Для составления треугольника надо выбрать две точки на одной стороне и одну точку на другой. 6 способов выбрать первую точку на AB , 5 способа – вторую и т.к. при перестановке вершин треугольник не изменится, то делим $6 \cdot 5$ на 2. Итак, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способов выбрать две точки на стороне AB , 7 способов на стороне BC . Всего $15 \cdot 7 = 105$ способов. Аналогично, $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способов выбрать две точки на стороне BC и 6 способов одну точку на стороне AB . Всего $21 \cdot 6 = 126$ способов. Следовательно, существует 231 различных треугольников с вершинами в выбранных точках.

3. (17 баллов) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N , так что $AN=NC$. Сторона AB в два раза больше BN и угол между AB и BN равен 40° . Найдите угол ABC .

Ответ: 110.

Решение.



Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Тогда, $DB = 2NB = AB$. Следовательно, треугольник ABD – равнобедренный и $\angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. $\angle ADB = \angle DBA$ (накрест лежащие при параллельных прямых). В итоге получаем, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$.

4. (15 баллов) Предмет состоит из двух деталей. Плотность одной из них 7800 кг/м^3 . Кроме того известно, что эта деталь занимает 30% от объёма всего предмета и её масса равна 60% от всей массы. Определите плотность второй детали.

Ответ: 2229 кг/м^3 .

Решение. Из условия: $m_1 = 0,6m$, и $V_1 = 0,3V$. Получаем $m_2 = 0,4m$, и $V_2 = 0,7V$. Плотность первой детали $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{0,6m}{0,3V}$. Плотность второй детали:

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{0,4m}{0,7V} = \frac{0,4}{0,7} \cdot \frac{0,3}{0,6} \rho_1 = 2229 \text{ кг/м}^3.$$

5. (20 баллов) Определите угол между часовой и минутной стрелками, в тот момент времени, когда они показывают 15 часов 40 минут.

Ответ: 130° .

Решение. Минутная стрелка отошла от двенадцати на $\frac{40}{60} \cdot 360 = 240^\circ$. Часовая стрелка отошла от двенадцати на $\frac{3}{12} \cdot 360 + \frac{40}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360 = 110^\circ$. Угол между стрелками: $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$.

6. (15 баллов) В воду, взятую при температуре 100°C , опустили металлический брусок, температура которого 20°C . После установления теплового равновесия температура оказалась равной 80°C . После этого, не вынимая из воды первый брусок, в воду опустили еще один такой же брусок, температура которого тоже 20°C . Какой теперь станет температура воды после установления теплового равновесия?

Ответ: 68°C .

Решение. Уравнение теплового баланса в первом случае $c_B m_B 20 = c_G m_G 60$.

Уравнение теплового баланса во втором случае:

$$c_B m_B (80 - t) + c_G m_G (80 - t) = c_G m_G (t - 20).$$

Получаем $c_B m_B \cdot 3 \cdot (80 - t) + c_G m_G (80 - t) = c_G m_G (t - 20)$. В результате: $t = 68^\circ\text{C}$.