Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(7-x)^2}-\sqrt[3]{(7-x)(9+x)}+\sqrt[3]{(9+x)^2}=4.$$

Ответ: – 1.

Решение. Пусть $a=7-x,\ b=9+x$. Заметим, что a+b=16. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}=4,\\ a+b=16.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, используя формулу разности кубов, получим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=4$. Возведём это равенство в квадрат, и вычтем из результата первое уравнение системы, получим $\sqrt[3]{ab}=4$.

Система $\begin{cases}\sqrt[3]{ab}=4,\\ a+b=16,\end{cases}$ сводится к квадратному уравнению. Решив его, получим $a=8;\ x=-1$. Сделаем проверку.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. Правильный ответ получен без обоснования (угадан) – ставим 3 балла.

2. (12 *баллов*) На перемене в кабинет математики влетела муха и стала ползать по плакату, на котором в координатной плоскости был изображён график квадратичной функции $y=f(x)$, со старшим коэффициентом равным 1. Сначала муха двигалась точно по параболе до точки с абсциссой равной 2, но затем начала двигаться по прямой пока снова не попала на параболу в точку с абсциссой равной 4. Найдите $f(3)$, если известно, что прямая $y=2023x$ пересекает путь мухи по отрезку прямой в его середине.

Ответ: 6068.

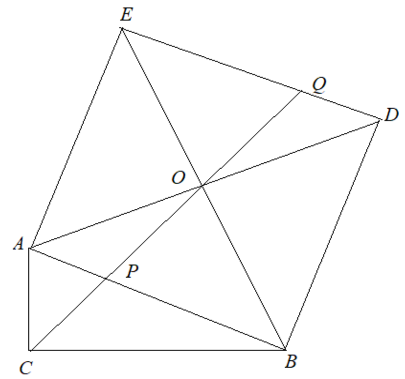
Решение. Пусть квадратичная функция имеет вид $y=x^2+bx+c$. Середина отрезка прямой имеет координаты $\left(\frac{2+4}{2};\frac{f(2)+f(4)}{2}\right)$, с другой стороны $(3;6069)$. Так как $f(2)=4+2b+c,\ f(4)=16+4b+c$, то $20+6b+2c=12138$ или $3b+c=6059$. Тогда $f(3)=9+3b+c=9+6059=6068$.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

3. (13 *баллов*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$, AC=1, BC=4. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C?

Ответ: 1:4.

Решение. Пусть O – центр квадрата, P – точка пересечения прямых AB и CO, Q – точка пересечения прямых DE и CO.



В четырехугольнике $ACBO$ противоположные углы прямые, поэтому он вписанный. Углы $\angle OAB$ и $\angle OCB$ опираются на одну хорду OB, следовательно, равны, то есть $\angle OCB = \angle OAB = 45^\circ$. Поэтому CP – биссектриса угла C. По свойству биссектрисы $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$. Тогда и $\frac{DQ}{QE} = \frac{1}{4}$, так как равны треугольники APO и DQO.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Показано, что четырехугольник $ACBO$ вписанный – 5 баллов. Показано, что CP – биссектриса угла C ещё 3 балла, всего 8 баллов. Найдено отношение AP и PB, где P – точка пересечения прямых AB и CO плюс 2 балла, всего 10 баллов.

4. (13 *баллов*) В танцевальном ансамбле 8 мальчиков и 16 девочек. Некоторые из них образуют танцевальные смешанные (мальчик и девочка) пары. Известно, что в каждой паре хотя бы один из партнёров не входит ни в какую другую пару. Каково может быть наибольшее количество танцевальных пар в этом ансамбле?

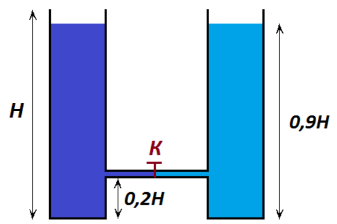
Ответ: 22.

Решение. Пример. Пусть Яна и Максим самые лучшие танцоры в ансамбле. Если Максим танцует со всеми девочками, кроме Яны, а Яна – со всеми мальчиками, кроме Максима, тот условие задачи выполнено и количество пар будет 15+7=22.

Оценка. Назовём пару, в которой партнёр не входит в другие пары – *мужской*, а пару, в которой партнёрша не входит в другие пары – *женской*. (Пара может быть и *мужской*, и *женской*). Если есть 8 мужских пар, то нет больше ни одной другой пары. Значит, если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 8, то количество мужских пар должно быть не более 7. Если есть 16 женских пар, то также нет никаких других пар. И если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 16, то количество женских пар должно быть не более 15. Получается, что общее количество пар (по условию каждая из них мужская или женская) не больше 7+15=22.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Только пример оценивается в 6 баллов; только оценка – в 7 баллов.

5. (15 *баллов*) Два одинаковых сосуда высотой H соединены тонкой трубкой с краном K на высоте $0{,}2H$. В левый сосуд налита вода, в правый – бензин. Уровни жидкостей одинаковы и равны $0{,}9H$. Определите уровни жидкостей в сосудах, которые установятся после открывания крана. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность бензина 600 кг/м^3.



Ответ: $h_{\text{лев}}=0{,}69H$; $h_{\text{пр}}=H$.

Решение. При открытии крана вода начнёт перетекать в правый сосуд. Возможны несколько ситуаций. **(1 балл)**

<u>Первая:</u> вода не дойдёт до трубки, бензин не выльется из сосуда. **(1 балл)**

Условие равновесия на уровне трубки: $\rho_{\text{воды}}g(0{,}7H-x)=\rho_{\text{бензина}}g(0{,}7H+x)$,
(1 балл)

где x – насколько уменьшился уровень воды в левом сосуде.

Получаем, $x=0{,}175H$, то есть эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Вторая:</u> вода до трубки в правом сосуде не дошла, но часть бензина вылилась.
(1 балл)

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}}g(0{,}7H-x)=\rho_{\text{бензина}}g\cdot 0{,}8H$. **(1 балл)**

Получаем, $x=0{,}22H$, то есть и эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Третья:</u> вода дойдёт до трубки и при этом часть бензина выливается. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}7H - x) = \rho_{\text{воды}} g(x - 0{,}2H) + \rho_{\text{бензина}} g(H - x)$. **(1 балл)**

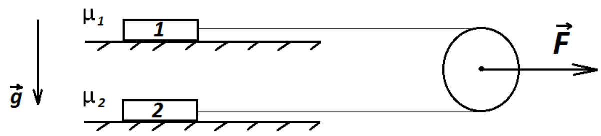
Получаем, $x = \frac{3}{14}H$. **(2 балла)**

Уровень в левом сосуде: $h_{\text{лев}} = 0{,}9H - \frac{3}{14}H = \frac{24}{35}H \approx 0{,}69H$. **(1 балл)**

Уровень в правой трубке: $h_{\text{пр}} = H$. **(1 балл)**

Замечание. В решении должны быть рассмотрены все возможные ситуации.

6. (10 *баллов*) На двух горизонтальных полках располагаются два груза с массами m_1=2 кг и m_2=3 кг, соединённые невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый гладкий блок. Коэффициенты трения грузов о полки μ_1=0,1 и μ_2=0,2. К центру блока прикладывают горизонтально направленную силу F=10 Н. Определите ускорения грузов и центра масс этой системы тел. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: a_1=1,5 м/с^2, a_2=0 м/с^2, a=0,6 м/с^2.

Решение. Так как блок невесомый, то сила натяжения нити $T = \frac{F}{2} = 5$ Н. **(2 балла)**

Сила трения скольжения для первого тела:

$F_{\text{тр}\,1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10 = 2$ Н. **(1 балл)**

Сила трения скольжения для второго тела:

$F_{\text{тр}\,2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 0{,}2 \cdot 3 \cdot 10 = 6$ Н. **(1 балл)**

Следовательно, второе тело стоит на месте: $a_2 = 0$ м/с^2. **(2 балла)**

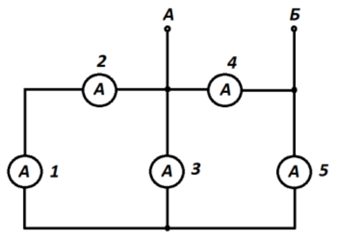
Второй закон Ньютона для первого тела: $T - F_{\text{тр}\,1} = m_1 a_1$,

ускорение первого тела: $a_1 = \frac{T - F_{\text{тр}\,1}}{m_1} = \frac{5-2}{2} = 1{,}5$ м/с^2. **(2 балла)**

Ускорение центра масс: $a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 0}{2+3} = 0{,}6$ м/с^2. **(2 балла)**

7. (10 *баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам $А$ и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания.

Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания первого амперметра I_1=2 мА.



Ответ: 24 мА.

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 2$ мА. **(2 балла)**

$I_3 = 2I_1 = 4$ мА. **(2 балла)**

$I_5 = I_3 + I_1 = 6$ мА. **(2 балла)**

$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 10$ мА. **(2 балла)**

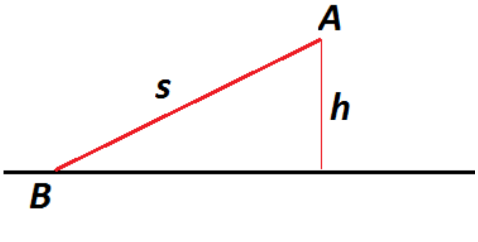
Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 24$ мА. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) Комар двигался над водой по прямой с постоянной скоростью v=1 м/с и в конце движения сел на поверхность воды. За 5 с до посадки он находился на высоте h=3 м от поверхности воды. Косинус угла падения солнечных лучей на поверхность воды равен 0,6. Падающий солнечный луч, благодаря которому образуется тень комара, и его траектория лежат в одной вертикальной плоскости. Определите скорость, с которой двигалась тень комара по дну водоема.

Ответ: 0 м/с или 1,6 м/с.

Решение. Комар пролетел до посадки $s = vt = 1 \cdot 5 = 5$ м. **(2 балла)**

То есть двигался по траектории *AB*.

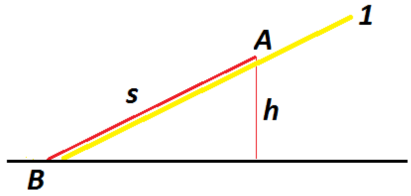


Косинус угла между траекторией и поверхностью воды равен 0,8. **(2 балла)**

Очевидно, что скорость движения тени по дну совпадает со скоростью движения тени по поверхности водоёма. **(3 балла)**

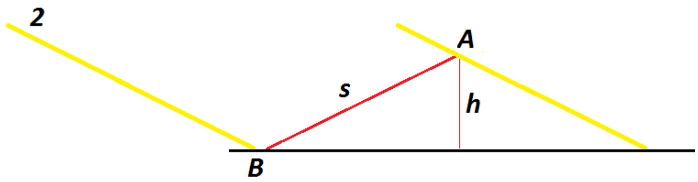
Так как угол падения солнечных лучей совпадает с углом между траекторией и поверхностью воды, то возможны два варианта. **(2 балла)**

Первый – комар двигается вдоль солнечного луча.



Скорость тени по дну водоема $v_{\text{тени}} = 0\ \text{м/с}$. **(3 балла)**

Второй – комар летит навстречу солнечному лучу.



Скорость тени: $v_{\text{тени}} = 2v\cos\beta = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 1{,}6\ \text{м/с}$. **(3 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(9-x)(7+x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=4.$$

Ответ: 1.

Решение. Пусть $a=9-x,\ b=7+x$. Заметим, что $a+b=16$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}=4,\\ a+b=16.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, используя формулу разности кубов, получим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=4$. Возведём это равенство в квадрат, и вычтем из результата первое уравнение системы, получим $\sqrt[3]{ab}=4$.

Система $\begin{cases}\sqrt[3]{ab}=4,\\ a+b=16,\end{cases}$ сводится к квадратному уравнению. Решив его, получим $a=8;\ x=1$. Сделаем проверку.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. Правильный ответ получен без обоснования (угадан) – ставим 3 балла.

2. (12 *баллов*) На перемене в кабинет математики влетела муха и стала ползать по плакату, на котором в координатной плоскости был изображён график квадратичной функции $y=f(x)$, со старшим коэффициентом равным -1. Сначала муха двигалась точно по параболе до точки с абсциссой равной 2, но затем начала двигаться по прямой пока снова не попала на параболу в точку с абсциссой равной 4. Найдите $f(3)$, если известно, что прямая $y=2023x$ пересекает путь мухи по отрезку прямой в его середине.

Ответ: 6070.

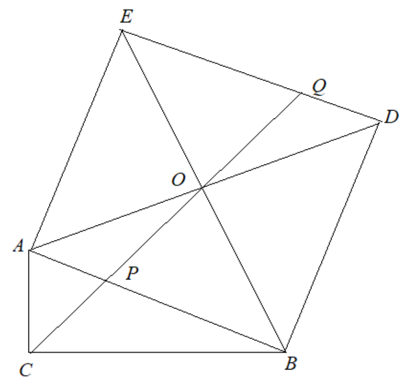
Решение. Пусть квадратичная функция имеет вид $y=-x^2+bx+c$. Середина отрезка прямой имеет координаты $\left(\frac{2+4}{2};\frac{f(2)+f(4)}{2}\right)$, с другой стороны $(3;6069)$. Так как $f(2)=-4+2b+c,\ f(4)=-16+4b+c$, то $-20+6b+2c=12138$ или $3b+c=6079$. Тогда $f(3)=-9+3b+c=-9+6079=6070$.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

3. (13 *баллов*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$, AC=2, BC=5. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C?

Ответ: 2:5.

Решение. Пусть O – центр квадрата, P – точка пересечения прямых AB и CO, Q – точка пересечения прямых DE и CO.



В четырехугольнике $ACBO$ противоположные углы прямые, поэтому он вписанный. Углы $\angle OAB$ и $\angle OCB$ опираются на одну хорду OB, следовательно, равны, то есть $\angle OCB = \angle OAB = 45^\circ$. Поэтому CP – биссектриса угла C. По свойству биссектрисы $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$. Тогда и $\frac{DQ}{QE} = \frac{2}{5}$, так как равны треугольники APO и DQO.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Показано, что четырехугольник $ACBO$ вписанный – 5 баллов. Показано, что CP – биссектриса угла C ещё 3 балла, всего 8 баллов. Найдено отношение AP и PB, где P – точка пересечения прямых AB и CO плюс 2 балла, всего 10 баллов.

4. (13 *баллов*) В танцевальном ансамбле 8 мальчиков и 20 девочек. Некоторые из них образуют танцевальные смешанные (мальчик и девочка) пары. Известно, что в каждой паре хотя бы один из партнёров не входит ни в какую другую пару. Каково может быть наибольшее количество танцевальных пар в этом ансамбле?

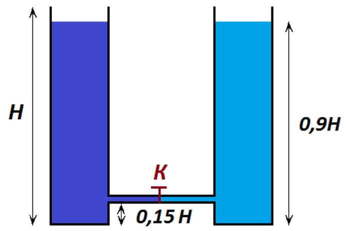
Ответ: 26.

Решение. Пример. Пусть Яна и Максим самые лучшие танцоры в ансамбле. Если Максим танцует со всеми девочками, кроме Яны, а Яна – со всеми мальчиками, кроме Максима, тот условие задачи выполнено и количество пар будет 19+7=26.

Оценка. Назовём пару, в которой партнёр не входит в другие пары – *мужской*, а пару, в которой партнёрша не входит в другие пары – *женской*. (Пара может быть и *мужской*, и *женской*). Если есть 8 мужских пар, то нет больше ни одной другой пары. Значит, если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 8, то количество мужских пар должно быть не более 7. Если есть 20 женских пар, то также нет никаких других пар. И если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 20, то количество женских пар должно быть не более 19. Получается, что общее количество пар (по условию каждая из них мужская или женская) не больше 7+19=26.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Только пример оценивается в 6 баллов; только оценка – в 7 баллов.

5. (15 *баллов*) Два одинаковых сосуда высотой H соединены тонкой трубкой с краном K на высоте $0{,}15H$. В левый сосуд налита вода, в правый – бензин. Уровни жидкостей одинаковы и равны $0{,}9H$. Определите уровни жидкостей в сосудах, которые установятся после открывания крана. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность бензина 600 кг/м^3.



Ответ: $h_{\text{лев}}=0{,}69H$; $h_{\text{пр}}=H$.

Решение. При открытии крана вода начнёт перетекать в правый сосуд. Возможны несколько ситуаций. **(1 балл)**

<u>Первая:</u> вода не дойдёт до трубки, бензин не выльется из сосуда. **(1 балл)**

Условие равновесия на уровне трубки:

$\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{бензина}} g(0{,}75H + x)$, **(1 балл)**

где x – насколько уменьшился уровень воды в левом сосуде.

Получаем $x = 0{,}1875H$, то есть эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Вторая:</u> вода до трубки в правом сосуде не дошла, но часть бензина вылилась. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{бензина}} g \cdot 0{,}75H$. **(1 балл)**

Получаем $x = 0{,}3H$, то есть и эта ситуация не работает. **(2 балла)**

Третья: вода дойдёт до трубки и при этом часть бензина выливается. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае:

$\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{воды}} g(x - 0{,}15H) + \rho_{\text{бензина}} g(H - x).$ **(1 балл)**

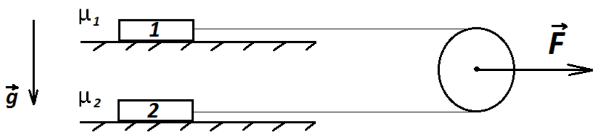
Получаем $x = \frac{3}{14}H.$ **(2 балла)**

Уровень в левом сосуде $h_{\text{лев}} = 0{,}9H - \frac{3}{14}H = \frac{24}{35}H \approx 0{,}69H.$ **(1 балл)**

Уровень в правой трубке: $h_{\text{пр}} = H.$ **(1 балл)**

Замечание. В решении должны быть рассмотрены все возможные ситуации.

6. (10 *баллов*) На двух горизонтальных полках располагаются два груза с массами m_1=1 кг и m_2=10 кг, соединённые невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый гладкий блок. Коэффициенты трения грузов о полки μ_1=0,3 и μ_2=0,1. К центру блока прикладывают горизонтально направленную силу F=20 Н. Определите ускорения грузов и центра масс этой системы тел. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: a_1=7 м/с^2, a_2=0 м/с^2, a=0,64 м/с^2.

Решение. Так как блок невесомый, то сила натяжения нити: $T = \frac{F}{2} = 10$ Н. **(2 балла)**

Сила трения скольжения для первого тела:

$F_{\text{тр }1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = 0{,}3 \cdot 1 \cdot 10 = 3$ Н. **(1 балл)**

Сила трения скольжения для второго тела:

$F_{\text{тр }2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 = 10$ Н. **(1 балл)**

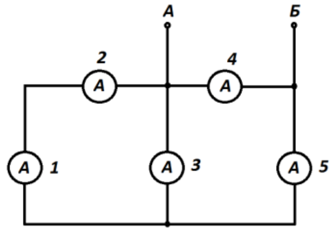
Следовательно, второе тело стоит на месте: $a_2 = 0$ м/с^2. **(2 балла)**

Второй закон Ньютона для первого тела: $T - F_{\text{тр }1} = m_1 a_1$,

ускорение первого тела: $a_1 = \frac{T - F_{\text{тр }1}}{m_1} = \frac{10-3}{1} = 7$ м/с^2. **(2 балла)**

Ускорение центра масс $a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{1\cdot 7 + 0}{1+10} = 0{,}64$ м/с^2. **(2 балла)**

7. (10 *баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам *А* и *Б* подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания второго амперметра I_2=4 мА.



Ответ: 48 мА.

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 4$ мА. **(2 балла)**

$I_3 = 2I_1 = 8$ мА. **(2 балла)**

$I_5 = I_3 + I_1 = 12$ мА. **(2 балла)**

$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 20$ мА. **(2 балла)**

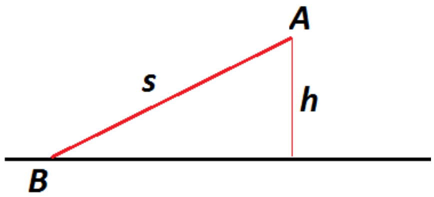
Сумма показаний всех амперметров $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 48$ мА. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) Комар двигался над водой по прямой с постоянной скоростью v=0,5 м/с и в конце движения сел на поверхность воды. За 20 с до посадки он находился на высоте h=6 м от поверхности воды. Косинус угла падения солнечных лучей на поверхность воды равен 0,6. Падающий солнечный луч, благодаря которому образуется тень комара, и его траектория лежат в одной вертикальной плоскости. Определите скорость, с которой двигалась тень комара по дну водоема.

Ответ: 0 м/с или 0,8 м/с.

Решение. Комар пролетел до посадки $s = vt = 0{,}5 \cdot 20 = 10$ м. **(2 балла)**

То есть двигался по траектории *AB*.

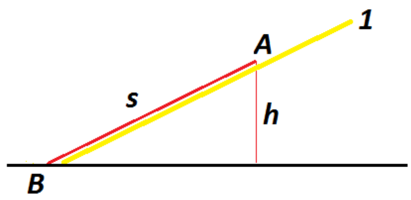


Косинус угла между траекторией и поверхностью воды равен 0,8. **(2 балла)**

Очевидно, что скорость движения тени по дну совпадает со скоростью движения тени по поверхности водоёма. **(3 балла)**

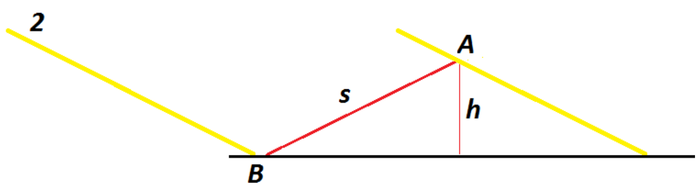
Так как угол падения солнечных лучей совпадает с углом между траекторией и поверхностью воды, то возможны два варианта. **(2 балла)**

Первый – комар двигается вдоль солнечного луча.



Скорость тени по дну водоема $v_{\text{тени}} = 0$ м/с. **(3 балла)**

Второй – комар летит навстречу солнечному лучу.



Скорость тени $v_{\text{тени}} = 2v\cos\beta = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}8$ м/с. **(3 балла)**