



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (17 баллов) Решите уравнение $||x - 1| + 2| - 3| = -2x - 4$.

Ответ: -4 .

Решение. Множество возможных решений данного уравнения $-2x - 4 \geq 0$, то есть $x \leq -2$. При этом условии внутренний модуль раскрывается однозначно. Используя свойство модуля $|-a| = |a|$, получаем уравнение $||x - 3| - 3| = -2x - 4$. Аналогично раскрываем внутренний модуль, получаем уравнение $|x| = -2x - 4$. При полученном ограничении последний модуль раскрывается однозначно, получаем уравнение $-x = -2x - 4$, то есть $x = -4$.

2. (16 баллов) Тётя Маша решила испечь торт. Замесила тесто, в которое по рецепту входят мука, масло и сахар в весовом отношении 3:2:1, и смешала масло с сахаром для крема в пропорции 2:3. Передумав печь торт, она соединила обе смеси, добавила 200 г муки и приготовила тесто для печенья, в которое мука, масло и сахар входят в отношении 5:3:2. Сколько тётя Маша израсходовала масла? Ответ запишите в граммах.

Ответ: 480.

Решение. Пусть тесто для торта содержит муку, масло и сахар в количестве $3x$, $2x$ и x соответственно, а крем содержит масло и сахар в количестве $2y$ и $3y$ соответственно. Используя отношения для печенья, получаем систему уравнений

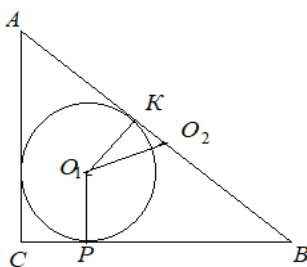
$$\begin{cases} \frac{3x+200}{2x+2y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{2x+2y}{x+3y} = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{После преобразований получаем систему } \begin{cases} x + 10y = 600, \\ x - 5y = 0. \end{cases} \quad \text{Откуда}$$

получаем, что $x=200$, $y=40$. Таким образом, тётя Маша потратила $2x+2y=400+80=480$ г масла.

3. (17 баллов) В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. В ответ запишите квадрат этого расстояния.

Ответ: 1,25.

Решение. По теореме Пифагора гипотенуза равна 5, площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Полупериметр $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$, тогда радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = 1$. Пусть O_1 – центр вписанной окружности, O_1P и O_1K – радиусы вписанной окружности, проведенные соответственно к катету и гипотенузе в точках касания окружности, катеты $BC=4$, $AC=3$ по условию. Имеем $BP=BC-r=4-1=3$. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $BK=BP=3$. Центр описанной окружности O_2 вокруг прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы и $BO_2=2,5$.



В прямоугольном треугольнике KO_1O_2 имеем $KO_2=3-2,5=0,5$, $KO_1=r=1$, O_1O_2 – искомое расстояние. По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 1 + 0,25 = 1,25$.

4. (15 баллов) Мяч бросили с балкона вертикально вверх. Известно, что на землю он упал спустя 6 секунд. Зная, что начальная скорость мяча 20 м/с, определите высоту балкона. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Ответ: 60 м.

Решение. Уравнение движения мяча:

$$y = 0 = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = h_0 + 20 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{2}.$$

Получаем $h_0 = 60 \text{ м}$.

5. (20 баллов) Два взаимно перпендикулярных луча, распространяясь в одной вертикальной плоскости, падают из воздуха на горизонтальную поверхность стекла.

Показатель преломления стекла $n=1,5$. Угол преломления для первого луча $\beta=25^\circ$.
Определите угол между преломлёнными лучами.

Ответ: 56° .

Решение. Закон преломления для первого луча $\frac{\sin \alpha}{\sin 25^\circ} = 1,5$. Следовательно, угол падения первого луча $\alpha = 39,34^\circ$. Угол падения второго луча $\beta = 90^\circ - 39,34^\circ = 50,66^\circ$. Закон преломления для второго луча $\frac{\sin 50,66^\circ}{\sin \gamma} = 1,5$. Угол преломления второго луча $\gamma = 31^\circ$. Угол между преломленными лучами:
 $\beta + \gamma = 56^\circ$.

6. (15 баллов) Две пружины жёсткостями 3 кН/м и 6 кН/м соединены последовательно. Какую работу необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на 5 см.

Ответ: 2,5 Дж.

Решение. Общая жёсткость $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2$ кН/м. Работа:

$$A = \Delta W = \frac{kx^2}{2} = \frac{2000 \cdot 0,05^2}{2} = 2,5 \text{ Дж.}$$



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (17 баллов) Решите уравнение $||x - 2| + 3| - 4| = -3x - 9$.

Ответ: -5 .

Решение. Множество возможных решений данного уравнения $-3x - 9 \geq 0$, то есть $x \leq -3$. При этом условии внутренний модуль раскрывается однозначно. Используя свойство модуля $|-a| = |a|$, получаем уравнение $||x - 5| - 4| = -3x - 9$. Аналогично раскрываем внутренний модуль, получаем уравнение $|x - 1| = -3x - 9$. При полученном ограничении последний модуль раскрывается однозначно, получаем уравнение $-x + 1 = -3x - 9$, то есть $x = -5$.

2. (16 баллов) Тётя Маша решила испечь торт. Замесила тесто, в которое по рецепту входят мука, масло и сахар в весовом отношении 3:2:1, и смешала масло с сахаром для крема в пропорции 2:3. Передумав печь торт, она соединила обе смеси, добавила 300 г муки и приготовила тесто для печенья, в которое мука, масло и сахар входят в отношении 5:3:2. Сколько тётя Маша израсходовала муки? Ответ запишите в граммах.

Ответ: 1200.

Решение. Пусть тесто для торта содержит муку, масло и сахар в количестве $3x$, $2x$ и x соответственно, а крем содержит масло и сахар в количестве $2y$ и $3y$ соответственно. Используя отношения для печенья, получаем систему уравнений

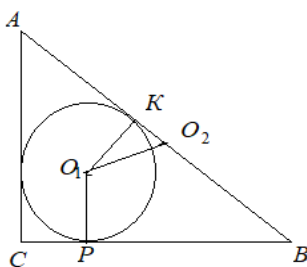
$$\begin{cases} \frac{3x+300}{2x+2y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{2x+2y}{x+3y} = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{После преобразований получаем систему } \begin{cases} x + 10y = 900, \\ x - 5y = 0. \end{cases} \quad \text{Откуда}$$

получаем, что $x=300$, $y=60$. Таким образом, тётя Маша потратила $3x+300=900+300=1200$ г муки.

3. (17 баллов) В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. В ответ запишите квадрат этого расстояния.

Ответ: 16,25.

Решение. По теореме Пифагора гипотенуза равна 13, площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Полупериметр $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$, тогда радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = 2$. Пусть O_1 – центр вписанной окружности, O_1P и O_1K – радиусы вписанной окружности, проведенные соответственно к катету и гипотенузе в точках касания окружности, катеты $BC=12$, $AC=5$ по условию. Имеем $BP=BC-r=12-2=10$. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $BK=BP=10$. Центр описанной окружности O_2 вокруг прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы и $BO_2=6,5$.



В прямоугольном треугольнике KO_1O_2 имеем $KO_2=10-6,5=3,5$, $KO_1=r=2$, O_1O_2 – искомое расстояние. По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 4 + 12,25 = 16,25$.

4. (15 баллов) Мяч бросили с балкона вертикально вверх. Известно, что на землю он упал спустя 3 секунды. Зная, что начальная скорость мяча 5 м/с, определите высоту балкона. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Ответ: 30 м.

Решение. Уравнение движения мяча:

$$y = 0 = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = h_0 + 5 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^2}{2}. \text{ Получаем } h_0 = 30 \text{ м.}$$

5. (20 баллов) Два взаимно перпендикулярных луча, распространяясь в одной вертикальной плоскости, падают из воздуха на горизонтальную поверхность стекла. Показатель преломления стекла $n=1,6$. Угол преломления для первого луча $\beta=30^\circ$. Определите угол между преломлёнными лучами.

Ответ: 52° .

Решение. Закон преломления для первого луча $\frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ} = 1,6$. Следовательно, угол падения первого луча $\alpha = 53,13^\circ$. Угол падения второго луча $\beta = 90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ$. Закон преломления для второго луча $\frac{\sin 36,87^\circ}{\sin \gamma} = 1,6$. Угол преломления второго луча $\gamma = 22^\circ$. В итоге получаем угол между преломленными лучами $\beta + \gamma = 52^\circ$.

6. (15 баллов) Две пружины жёсткостями 6 кН/м и 12 кН/м соединены последовательно. Какую работу необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на 10 см.

Ответ: 20 Дж.

Решение. Общая жёсткость: $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4$ кН/м. Работа:

$$A = \Delta W = \frac{kx^2}{2} = \frac{4000 \cdot 0,1^2}{2} = 20 \text{ Дж.}$$