10 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{80!}{10^{80}},$$

где 80!=1·2·3·…·79·80.

Ответ. $2^2 \cdot 5^{61}$.

Решение. Имеем $80! = 2^{40+20+10+5+2+1} \cdot 5^{16+3} \cdot \ldots = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{80}} = \frac{2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots}{2^{80} \cdot 5^{80}} = \frac{\ldots}{2^2 \cdot 5^{61}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 5 баллов, степень 5 в числителе +3 балла; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) В двух кружках для 10 классов «Олимпиадная математика» и «Робототехника» участвуют более 29 ребят. Количество школьников в первом кружке, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает количество школьников во втором кружке. Утроенное количество участников в первом кружке превышает удвоенное количество участников второго кружка, но менее чем на 60. Сколько школьников занимается в кружке «Олимпиадная математика»?

Ответ. 24.

Решение. Пусть n – количество школьников в первом кружке, m – количество школьников во втором кружке. По условию задачи получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} n+m>29, \\ n-2>3m, \\ 3n-2m<60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+m>29, & (1) \\ n-3m>2, & (2) \\ -3n+2m>-60. & (3) \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 3 и сложим с неравенством (2), получим $4n>89$ или $n>22\frac{1}{4}$. Умножим неравенство (2) на 2 и сложим с неравенством (3), умноженным на 3, получим: $-7n>-176$ или $n<25\frac{1}{7}$. Учитывая целочисленность n, получаем, что n=23, n=24 или n=25.

Проверим n=23. Подставляя в неравенства (1) и (2) исходной системы, получаем систему: $\begin{cases} m > 6, \\ m < 7; \end{cases}$ которая не имеет целых решений.

Проверим n=24. Получаем систему $\begin{cases} m > 5, \\ m < 7\frac{1}{3}, \\ m > 6. \end{cases}$ Отсюда получаем m=7.

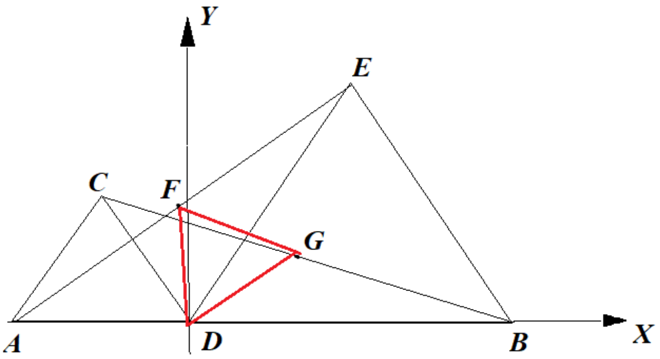
И, наконец, проверим n=25. Получаем систему $\begin{cases} m > 4, \\ m < 7\frac{2}{3}, \\ m > 7\frac{1}{2}. \end{cases}$ Которая не имеет целых решений.

Критерии оценивания. Получена система неравенств, ставим по 2 балла за каждое верное неравенство. Если перебором найдено верное решение, но не доказана его единственность, ставим всего 6 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) На отрезке AB по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ACD и DEB со сторонами 2 и 5 соответственно (точка D лежит на отрезке AB). Точки F и G – середины отрезков AE и CB соответственно. Покажите, что $\triangle FGD$ равносторонний, и найдите длину его стороны.

Ответ. $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Решение. Пусть начало декартовой системы координат находится в точке D, положительное направление оси Dx совпадает с лучом DB. Стороны треугольников ACD и DEB равны соответственно a и b.



Тогда $A(-a;0)$; $B(b;0)$; $C\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$; $E\left(\frac{b}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$. Координаты точек F и G найдём по формуле координат середины отрезков:

$$F\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}b\right);\ G\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}a\right).$$

Находим стороны $\triangle FGD$:

$$FD=\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-ab+a^2}}{2}.$$

Для двух других сторон $\triangle FGD$ получаем то же выражение. Следовательно, $\triangle FGD$ равносторонний. Длина его стороны равна:

$$\frac{\sqrt{b^2-ab+a^2}}{2}=\frac{\sqrt{5^2-2\cdot 5+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Критерии оценивания. Доказано, что треугольник равносторонний и получен верный ответ – 13 баллов. Если было приведено решение без метода координат, то за верное доказательство, что треугольник правильный, ставим 9 баллов; правильно найдена сторона треугольника – 4 балла. Если имеются арифметические ошибки при верном ходе решения задачи – минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) В стае обезьян 80 детёнышей. У любых двух из них есть общий дед и, разумеется, у каждого детёныша два деда. Докажите, что найдётся дед, у которого хотя бы 54 внука (в том числе внучки).

Решение. Пусть деды – вершины графа. Вершины (то есть дедов) соединяем ребром, если у них есть хотя бы один общий внук. Так как не бывает больше двух дедов у одного внука, а у любых двух внуков есть общий по условию дед, не могут два ребра этого графа не иметь общей вершины. Поэтому возможны два варианта.

1. Одна вершина соединена с остальными, эти остальные не соединены друг с другом. В этом случае у этого деда все детёныши – внуки.

2. Есть только три вершины, соединенные друг с другом. Берём деда (вершину), у которого больше всего внуков. На всех у них 160 внуков. Значит, у кого-то из трёх больше, чем 53.

Критерии оценивания. Приведено верное доказательство – 14 баллов. Введён граф, где деды – вершины, внуки – ребра, ставим 3 балла. Замечено, что этот граф имеет один из двух видов: «звезда» или «треугольник» – 10 баллов. Если что-то одно из двух, и на этой основе неполное решение – 7 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом $\alpha=30^0$ к горизонту со скоростью $v_0=10$ м/с. Нормальное ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии S=5,196 м от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии.

Ответ: 250 м/с^2.

Решение. Уравнения движения до аномалии: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 5\sqrt{3} \cdot t$,
(1 балл)

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 5 \cdot t - 5 \cdot t^2$, **(1 балл)**

$v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{3}$, **(1 балл)**

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 5 - 10t$. **(1 балл)**

Отсюда получаем, что для верхней точки полёта: $t_в = 0{,}5с$, $x_в = 2{,}5\sqrt{3}$м, $y_в = 1{,}25$м. **(1 балл)**

Уравнения движения внутри аномалии:

$S = x_в + v_x t = 2{,}5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}t$, **(1 балл)**

$y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 1{,}25 - \frac{g_a t^2}{2}$. **(1 балл)**

Решая данную систему, получаем: $g_a = 250\,\text{м/с}^2$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением w=σT^4, где σ=5,67·10^{-8} Дж/(с·м^2·К^4). До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной L=50 см и диаметром сечения D=2 мм, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение U=220 В и по проволоке протекает ток I=5 А?

Ответ: 1576 К.

Решение. Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI$. **(2 балла)**

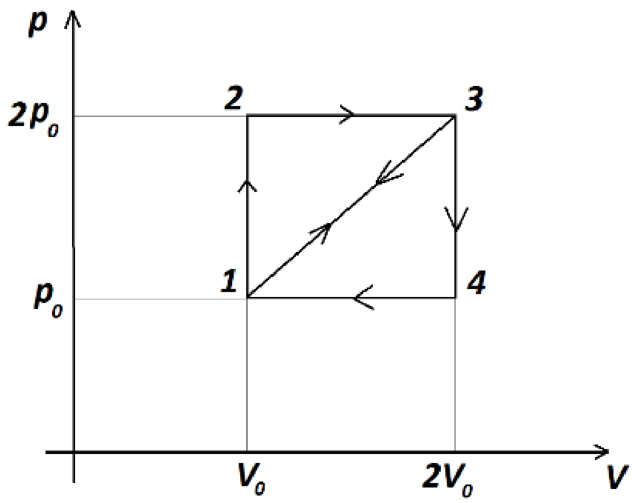
Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D$. **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1576$ К.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Найдите отношение их КПД.



Ответ: 1,08.

Решение. Для цикла 1-2-3-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2}p_0V_0$. **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 2p_0V_0 = 6{,}5p_0V_0$.
(2 балла)

КПД данного цикла: $\eta_{123} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{13}$. **(2 балла)**

Для цикла 1-3-4-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2}p_0V_0$. **(2 балла)**

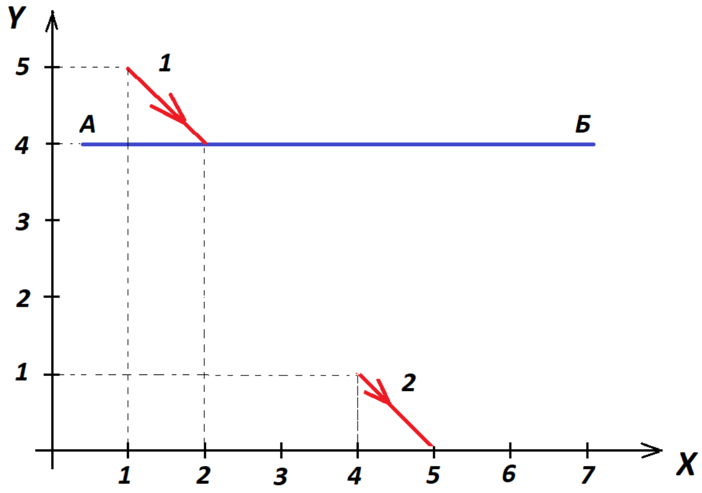
Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0$. **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{12}$. **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\frac{\eta_{134}}{\eta_{123}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть луча 1 до падения на верхнюю грань плоскопараллельной пластины, верхняя грань *АБ* этой пластины, и часть луча 2 после прохождения пластины. Показатель преломления материала пластины *n*=1,5. Рассчитайте местоположение нижней грани пластины.



Ответ: y=1,85.

Решение. Угол падения 1 луча равен 45^0. **(2 балла)**

Закон преломления на пластине: $\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha} = 1{,}5.$ **(2 балла)**

В результате: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$ **(2 балла)**

Уравнение преломлённого луча: $y = -\sqrt{\frac{7}{2}}x + 4 + 2\sqrt{\frac{7}{2}}.$ **(4 балла)**

Уравнение луча 2: $y = 5 - x.$ **(2 балла)**

Получаем: $y = -\sqrt{\frac{7}{2}}(5 - y) + 4 + 2\sqrt{\frac{7}{2}}.$

Нижняя грань пластины расположена на уровне: $y \approx 1{,}85.$ **(3 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{81!}{10^{81}},$$

где 81!=1·2·3·…·80·81.

Ответ. $2^3 \cdot 5^{62}$.

Решение. Имеем $81! = 2^{40+20+10+5+2+1} \cdot 5^{16+3} \cdot \ldots = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{81}} = \frac{2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots}{2^{81} \cdot 5^{81}} = \frac{\ldots}{2^3 \cdot 5^{62}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 5 баллов, степень 5 в числителе +3 баллов; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) В двух кружках для 10 классов «Олимпиадная математика» и «Робототехника» участвуют более 29 ребят. Количество школьников в первом кружке, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает количество школьников во втором кружке. Утроенное количество участников в первом кружке превышает удвоенное количество участников второго кружка, но менее чем на 60. Сколько школьников занимается в кружке «Робототехника»?

Ответ. 7.

Решение. Пусть n – количество школьников в первом кружке, m – количество школьников во втором кружке. По условию задачи получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} n + m > 29, \\ n - 2 > 3m, \\ 3n - 2m < 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + m > 29, & (1) \\ n - 3m > 2, & (2) \\ -3n + 2m > -60. & (3) \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 3 и сложим с неравенством (2), получим $4n > 89$ или $n > 22\frac{1}{4}$. Умножим неравенство (2) на 2 и сложим с неравенством (3), умноженным на 3, получим: $-7n > -176$ или $n < 25\frac{1}{7}$. Учитывая целочисленность n, получаем, что n=23, n=24 или n=25.

Проверим n=23. Подставляя в неравенства (1) и (2) исходной системы, получаем систему: $\begin{cases} m > 6, \\ m < 7; \end{cases}$ которая не имеет целых решений.

Проверим n=24. Получаем систему $\begin{cases} m > 5, \\ m < 7\frac{1}{3}, \\ m > 6. \end{cases}$ Отсюда получаем m=7.

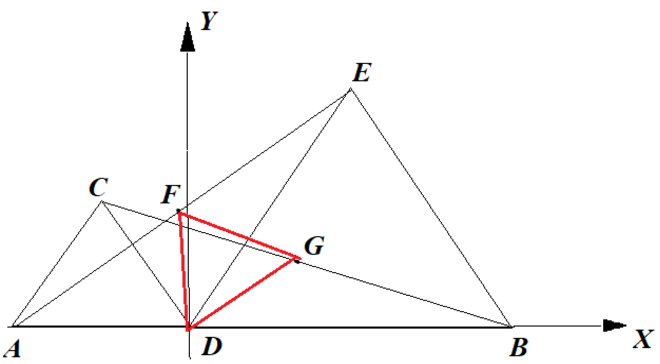
И, наконец, проверим n=25. Получаем систему $\begin{cases} m > 4, \\ m < 7\frac{2}{3}, \\ m > 7\frac{1}{2}. \end{cases}$ Которая не имеет целых решений.

Критерии оценивания. Получена система неравенств, ставим по 2 балла за каждое верное неравенство. Если перебором найдено верное решение, но не доказана его единственность, ставим всего 6 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) На отрезке AB по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ACD и DEB со сторонами 3 и 4 соответственно (точка D лежит на отрезке AB). Точки F и G – середины отрезков AE и CB соответственно. Покажите, что $\triangle FGD$ равносторонний, и найдите длину его стороны.

Ответ. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Пусть начало декартовой системы координат находится в точке D, положительное направление оси Dx совпадает с лучом DB. Стороны треугольников ACD и DEB равны соответственно a и b.



Тогда $A(-a;0)$; $B(b;0)$; $C\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$; $E\left(\frac{b}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$. Координаты точек F и G найдём по формуле координат середины отрезков:

$$F\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}b\right);\ G\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}a\right).$$

Находим стороны $\triangle FGD$:

$$FD = \sqrt{\left(\frac{b}{4} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} b\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - ab + a^2}}{2}.$$

Для двух других сторон $\triangle FGD$ получаем то же выражение. Следовательно, $\triangle FGD$ равносторонний. Длина его стороны равна:

$$\frac{\sqrt{b^2 - ab + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4^2 - 3 \cdot 4 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Критерии оценивания. Доказано, что треугольник равносторонний и получен верный ответ – 13 баллов. Если было приведено решение без метода координат, то за верное доказательство, что треугольник правильный, ставим 9 баллов; правильно найдена сторона треугольника – 4 балла. Если имеются арифметические ошибки при верном ходе решения задачи – минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) В стае обезьян 82 детёныша. У любых двух из них есть общий дед и, разумеется, у каждого детёныша два деда. Докажите, что найдётся дед, у которого хотя бы 55 внуков (в том числе внучек).

Решение. Пусть деды – вершины графа. Вершины (то есть дедов) соединяем ребром, если у них есть хотя бы один общий внук. Так как не бывает больше двух дедов у одного внука, а у любых двух внуков есть общий по условию дед, не могут два ребра этого графа не иметь общей вершины. Поэтому возможны два варианта:

1. Одна вершина соединена с остальными, эти остальные не соединены друг с другом. В этом случае у этого деда все детёныши – внуки;

2. Есть только три вершины, соединенные друг с другом. Берём деда (вершину), у которого больше всего внуков. На всех у них 164 внуков. Значит, у кого-то из трёх больше, чем 54.

Критерии оценивания. Приведено верное доказательство – 14 баллов. Введён граф, где деды – вершины, внуки – ребра, ставим 3 балла. Замечено, что этот граф имеет один из двух видов: «звезда» или «треугольник» – 10 баллов. Если что-то одно из двух, и на этой основе неполное решение – 7 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом α=30^0 к горизонту со скоростью v_0=20 м/с. Нормальное ускорение свободного падения g=10 м/с^2. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии S=25,98 м от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии.

Ответ: 40 м/с^2.

Решение. Уравнения движения до аномалии:

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 10\sqrt{3} \cdot t,$ **(1 балл)**

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2,$ **(1 балл)**

$v_x = v_0 \cos\alpha = 10\sqrt{3},$ **(1 балл)**

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 10 - 10t.$ **(1 балл)**

Отсюда получаем, что для верхней точки полета: $t_в = 1\ c$, $x_в = 10\sqrt{3}$ м, $y_в = 5$ м. **(1 балл)**

Уравнения движения внутри аномалии: $S = x_в + v_x t = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}t.$ **(1 балл)**

$y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 5 - \frac{g_a t^2}{2}.$ **(1 балл)**

Решая данную систему, получаем: $g_a = 40$ м/с^2. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением $w=\sigma T^4$, где σ=5,67·10^{-8} Дж/(с·м^2·К^4). До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной L=25 см и диаметром сечения D=1 мм, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение U=220 В и по проволоке протекает ток I=5 А?

Ответ: 2229 К.

Решение. Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI.$ **(2 балла)**

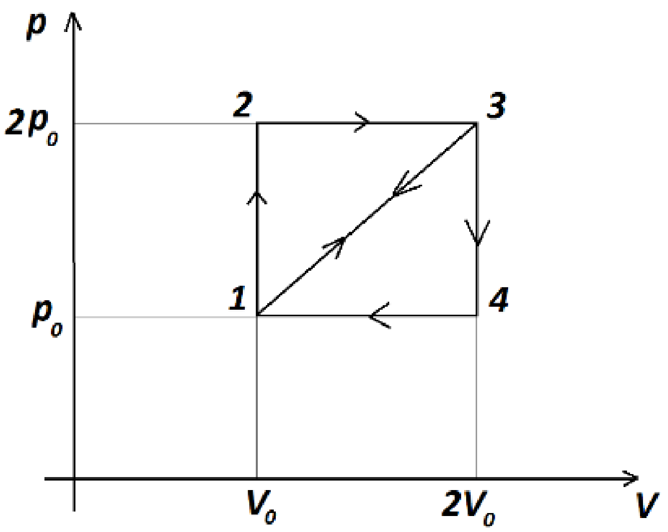
Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D.$ **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 2229$ К.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Найдите отношение их КПД.



Ответ: 1,08.

Решение. Для цикла 1-2-3-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$. **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 2p_0V_0 = 6{,}5p_0V_0.$$
(2 балла)

КПД данного цикла: $\eta_{123} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{13}$. **(2 балла)**

Для цикла 1-3-4-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$. **(2 балла)**

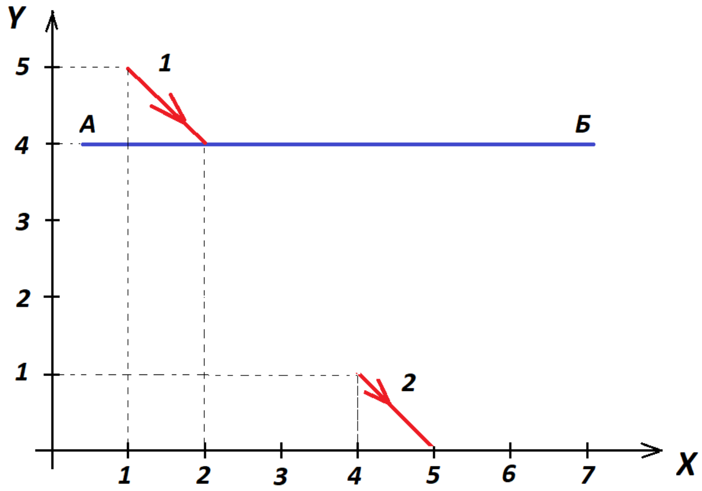
Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0.$$ **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{12}$. **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\frac{\eta_{134}}{\eta_{123}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть луча 1 до падения на верхнюю грань плоскопараллельной пластины, верхняя грань *АБ* этой пластины, и часть луча 2 после прохождения пластины. Показатель преломления материала пластины *n*=1,6. Рассчитайте местоположение нижней грани пластины.



Ответ: y=2,03.

Решение. Угол падения 1 луча равен 45^0. **(2 балла)**

Закон преломления на пластине: $\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha} = 1{,}6$. **(2 балла)**

В результате: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{1}{4{,}12}}$. **(2 балла)**

Уравнение преломленного луча: $y = -\sqrt{4{,}12}x + 4 + 2\sqrt{4{,}12}$. **(4 балла)**

Уравнение луча 2: $y = 5 - x$. **(2 балла)**

Получаем: $y = -\sqrt{4{,}12}(5 - y) + 4 + 2\sqrt{4{,}12}$.

Нижняя грань пластины расположена на уровне: $y \approx 2{,}03$. **(3 балла)**