11 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

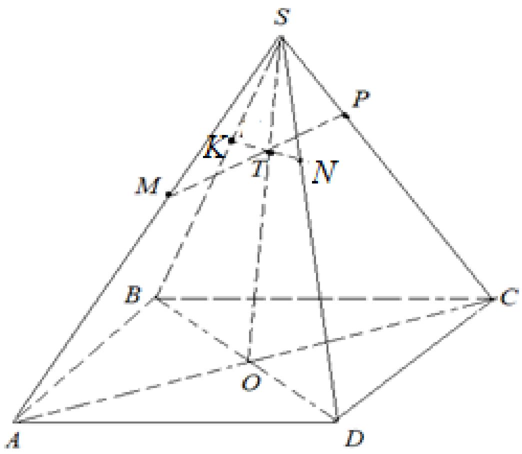
Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

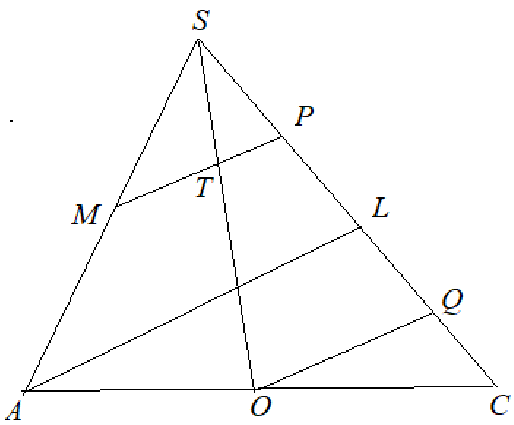
1. (*12 баллов*) Параллелограмм *ABCD* является основанием пирамиды *SABCD*. Точки *M*, *N* и *P* лежат на рёбрах *SA*, *SD* и *SC* соответственно, причём *SM*:*MA*=1:2, *SN*:*ND*=1:3, *SP*:*PC*=1:4. В каком отношении плоскость *MNP* делит ребро *SB*?

Ответ: 1:3.

Решение. Пусть плоскости *BSD* и *ASC* пересекаются по прямой *SO*. Рассмотрим треугольник *ASC*. Пусть $T = MP \cap SO$.



В треугольнике *ASC* проведём прямые *AL* и *OQ* параллельные *MP*.



По теореме Фалеса имеем $\frac{SP}{PL} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{LQ}{QC} = \frac{AO}{OC} = 1$. Учитывая, что *SP*:*PC*=1:4, получаем, что $\frac{ST}{TO} = \frac{1}{3}$.

Пусть $K = NT \cap SB$. Так как *SN*:*ND*=*ST*:*TO*=1:3, то в силу теоремы Фалеса прямые *BD* и *NK* параллельны, и, следовательно, *SK*:*KB*=1:3.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (*12 баллов*) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2 (xy)} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{\log_3 y \cdot \log_{25} z}{\log_5 (yz)} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\log_{27} z \cdot \log_2 x}{\log_{16} (zx)} = 1. \end{cases}$$

Ответ: x=3, y=9, z=27.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0,\ y > 0,\ z > 0, \\ xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1. \end{cases}$ Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 3\log_3 x \cdot \log_2 y = 2\log_2 (xy), \\ 5\log_3 y \cdot \log_5 z = 6\log_5 (yz), \\ 4\log_3 z \cdot \log_2 x = 3\log_2 (zx). \end{cases} \qquad (1)$$

Сделаем замену: $\begin{cases} \log_3 x = u, \\ \log_3 y = v, \\ \log_3 z = t. \end{cases}$ После преобразований получаем систему $\begin{cases} 3u \cdot v = 2(u+v), \\ 5v \cdot t = 6(v+t), \\ 4t \cdot u = 3(u+t). \end{cases}$ (2). Из первого уравнения системы (2) выразим $v = \frac{2u}{3u-2}$, из третьего уравнения выразим $t = \frac{3u}{4u-3}$. Подставим во второе уравнение системы, получим после преобразований уравнение $u^2 - u = 0$. При u=0 получаем v=t=0, но соответствующие значения x, y, z не удовлетворяют ОДЗ. При u=1 получаем v=2, t=3, следовательно, x=3, y=9, z=27.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Получена система (1) и записано ОДЗ – 2 балла, сделана замена и получена система (2) рациональных уравнений + 5 баллов. Правильно решена система (2) + 4 балла. При правильном ходе решения допущены арифметические ошибки минус 3 балла. Получены посторонние решения (не проверено ОДЗ) ставим 6 баллов.

3. (*13 баллов*) Даны числа x, y, z такие, что $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$. Докажите, что $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a} = (2^x; \sin^2 y; \ln^3 z)$ и $\vec{b} = (2; 3; -6)$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Имеем $|\vec{b}| = \sqrt{4+9+36} = 7$, $|\vec{a}| = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = 4$. Тогда получаем, что $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Обоснованное доказательство – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана последовательность:

$$a_1 = \cos 10°, a_2 = \cos 100°, \ldots, a_n = \cos(10^n)°, \ldots.$$

Найдите наименьшее значение выражения

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x, \text{ где } x \in R.$$

Ответ: -1.

Решение. Покажем, что $a_3 = a_4 = \cdots = a_n$. Если $n \geq 3$, то углы соседних членов последовательности будут отличаться на величину кратную $360°$, действительно:

$$10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10-1) = 9 \cdot 1000 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}.$$

Таким образом, $a_{2023} = a_{2024} = a_3 = \cos 1000°$. Далее получаем

$$a_2 + a_{2023} + a_{2024} = \cos 100° + 2\cos 1000° = \cos 100° + 2\cos(360° \cdot 3 - 80) =$$

$= \cos(90° + 10°) + 2\cos 80° = -\sin 10° + 2\sin 10° = \sin 10°$. Тогда

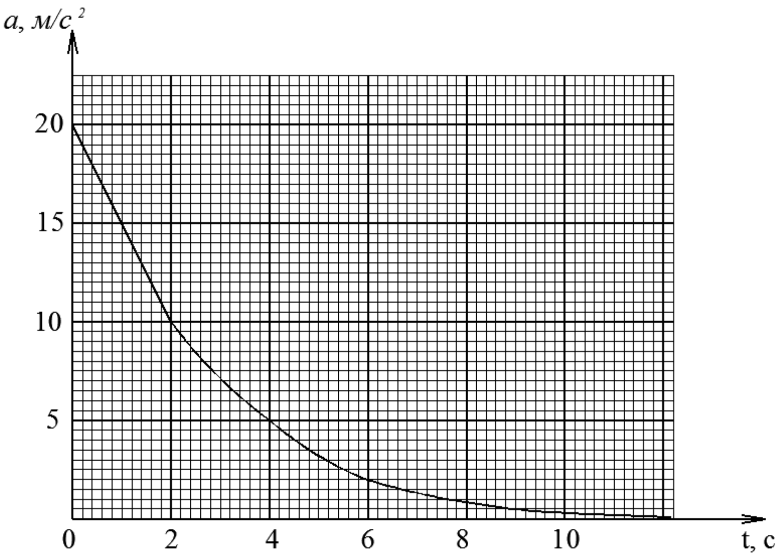
$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10° \cdot \cos x + \sin 10° \cdot \sin x =$$

$= \cos(x - 10°)$. Наименьшее значение равно -1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Доказано, что все члены последовательности равны, начиная с третьего, ставим 6 баллов. Правильно найдено $a_2 + a_{2023} + a_{2024}$ ещё 4 балла. Имеются арифметические ошибки – минус 3 балла.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (15 баллов) Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените начальную скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: 30 м/с.

Решение. График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

В момент времени $t = 2$ с ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0$ м/с. **(4 балла)**
Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**
Оценка площади даёт следующий результат: $v_0 = 30$ м/с. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Два маленьких одноименно заряженных шарика удерживают на расстоянии L друг от друга. Заряды шариков q_1 и q_2, их массы m_1 и m_2 соответственно. В определённый момент времени шарики отпускают. Определите их скорости через достаточно продолжительный промежуток времени. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, $\quad v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$.

Решение. Закон сохранения импульса: $0 = m_1v_1 - m_2v_2$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $k\frac{q_1q_2}{L} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему, получаем: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, **(2 балла)**

$v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$. **(2 балла)**

7. (*10 баллов*) Одиннадцатиклассник Петя выполнял эксперимент с водяным паром. Он взял пар при температуре T=100°C, поместил его в вертикальный цилиндрический сосуд под невесомый поршень. Поршень Петя установил на высоте h_0=30 см от дна сосуда и отпустил. После установления равновесия поршень оказался на высоте h=10 см, при этом давление пара выросло в 2 раза. Определите массу пара, которую Петя взял для работы. Площадь дна сосуда S=100 см^2.

Ответ: 0,048 кг.

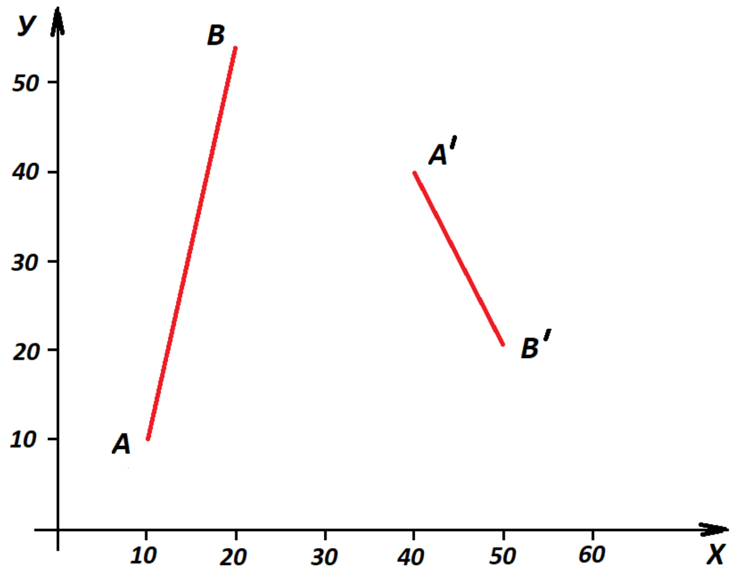
Решение. Давление пара, после установления равновесия при температуре T=100°C, равно атмосферному. **(2 балла)**

Следовательно, пар стал насыщенным. **(2 балла)**

Исходное давление пара: $p = 5 \cdot 10^4$ Па. **(2 балла)**

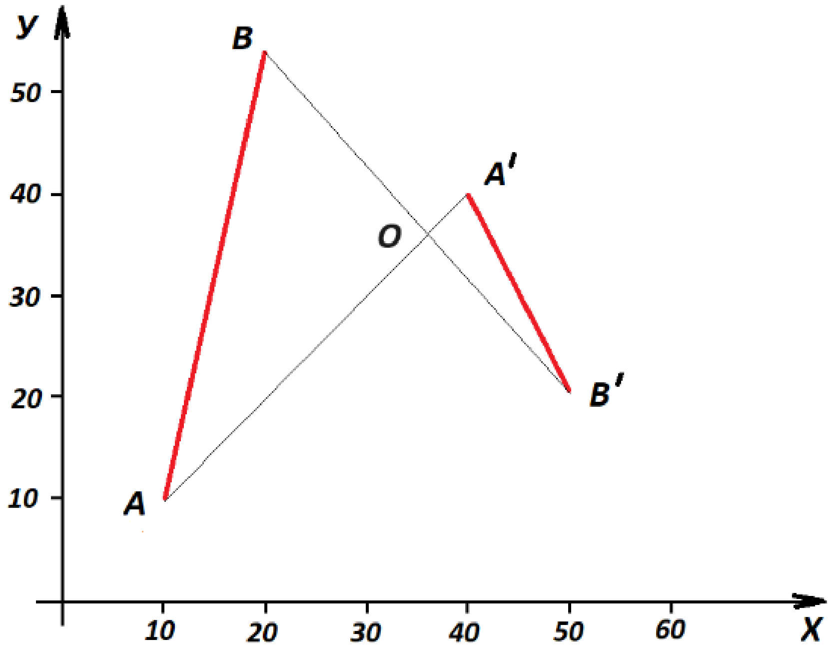
Масса пара: $m = \frac{pVM}{RT} = \frac{pSh_0}{RT} = \frac{5\cdot10^4\cdot100\cdot10^{-4}\cdot0{,}3}{8{,}31\cdot373} = 0{,}048$ кг. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показано местоположение предмета *AB* и его изображения $A^I B^I$, полученного с помощью тонкой линзы. С помощью циркуля и линейки восстановите положение линзы, определите координаты её оптического центра и фокусов. Словами опишите последовательность действий, приводящую к ответу.



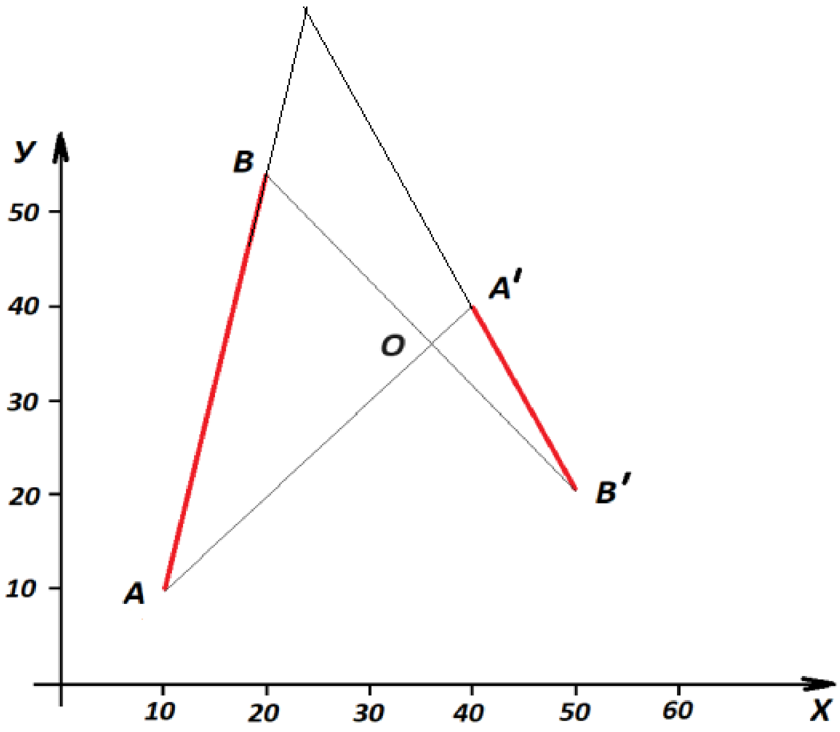
Ответ: Оптический центр – (36; 36); фокусы – (32; 34) и (40; 38).

Решение: Соединяем *A* и $A^/$, а также *B* и $B^/$.

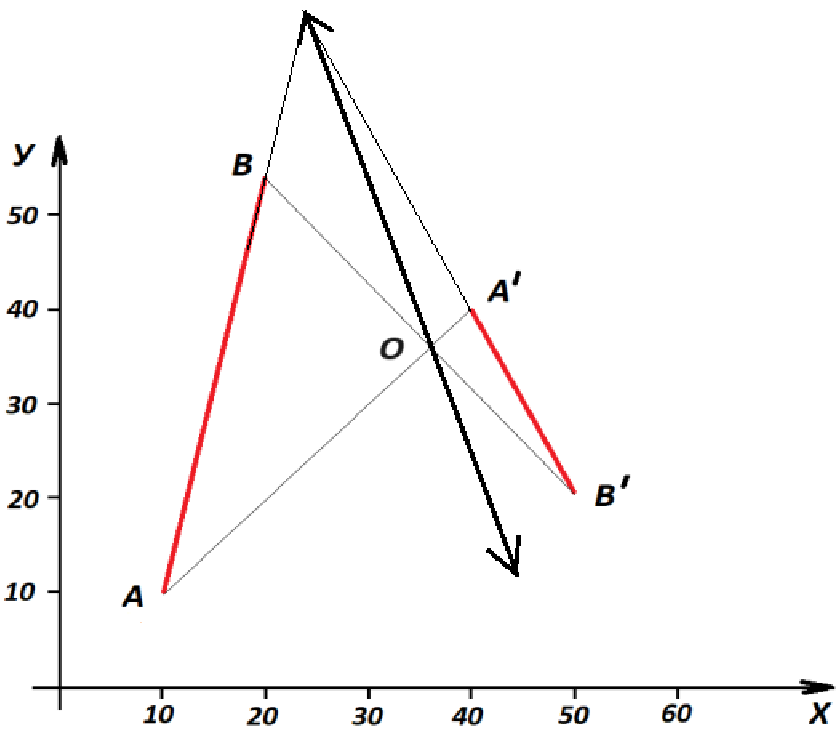


Точка пересечения даёт оптический центр. Его координаты (36; 36). **(4 балла)**

Продолжаем *AB* и $A^/B^/$.

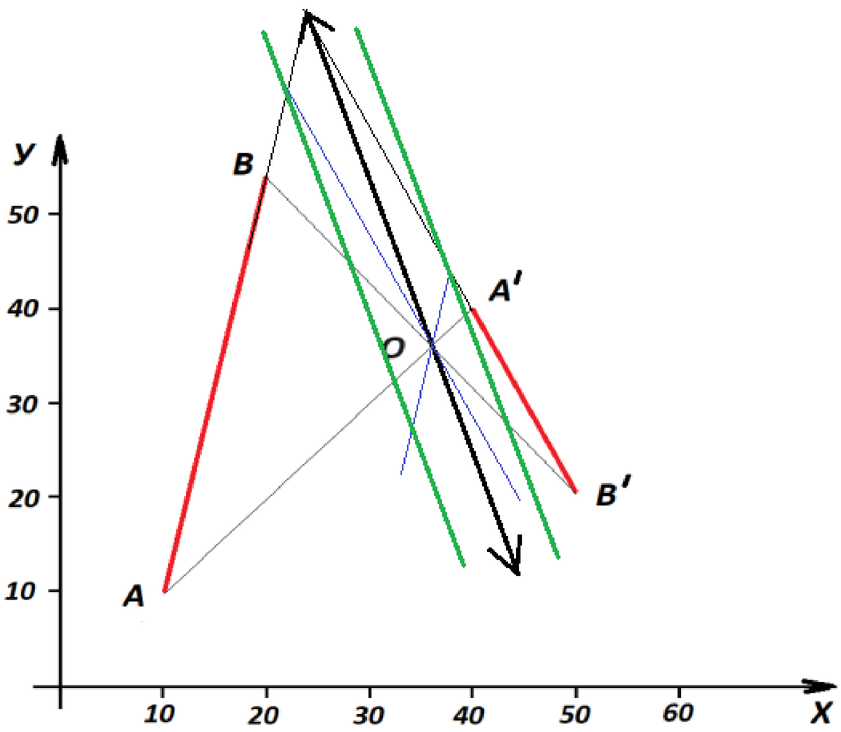


Точка пересечения дает вторую точку линзы. **(3 балла)**



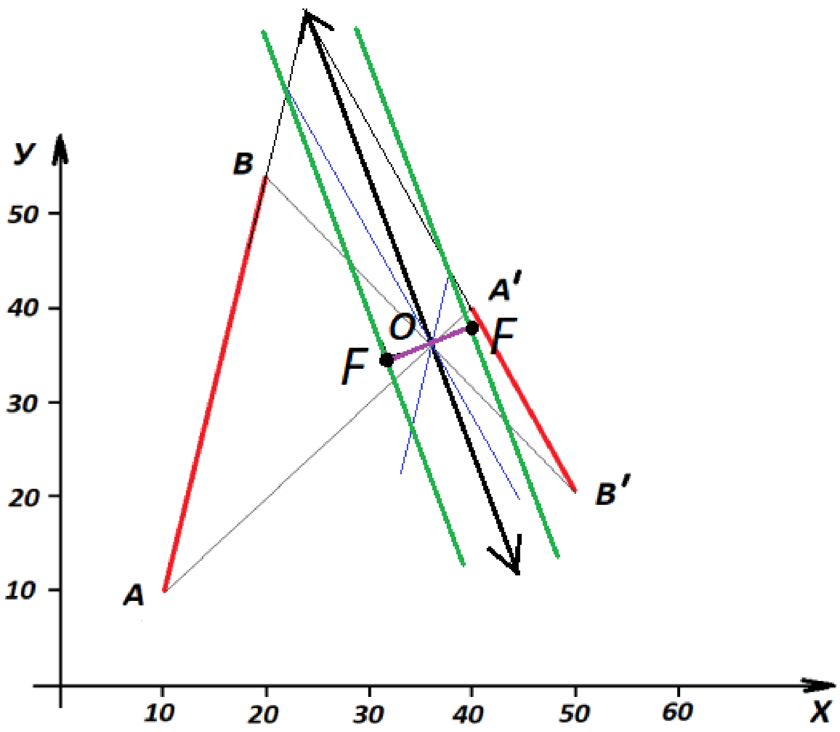
Через оптический центр проводим прямые параллельные AB и $A^/B^/$. Их пересечения с лучами $A^/B^/$ и AB дают положения фокальных плоскостей (на рисунке зеленым цветом).

(4 балла)



Из оптического центра опускаем перпендикуляры на фокальные плоскости. Получаем местоположение главных фокусов (32; 34) и (40; 38).

(4 балла)



<u>*Примечание:*</u> *если приведены правильные рассуждения, но ответ отличается от авторского в пределах разумной погрешности, то работа оценивается полным баллом.*

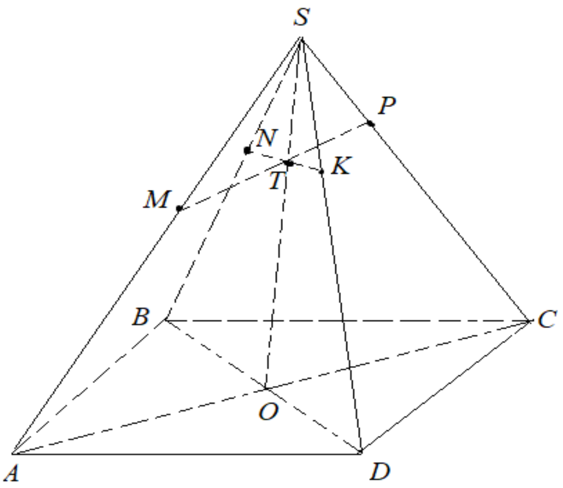
Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

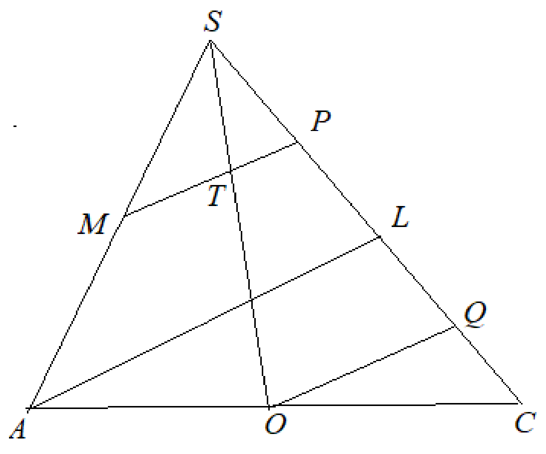
1. (*11 баллов*) Параллелограмм *ABCD* является основанием пирамиды *SABCD*. Точки *M*, *N* и *P* лежат на рёбрах *SA*, *SB* и *SC* соответственно, причём *SM*:*MA*=1:2, *SN*:*NB*=1:3, *SP*:*PC*=1:4. В каком отношении плоскость *MNP* делит ребро *SD*?

Ответ: 1:3.

Решение. Пусть плоскости *BSD* и *ASC* пересекаются по прямой *SO*. Рассмотрим треугольник *ASC*. Пусть $T = MP \cap SO$.



В треугольнике *ASC* проведём прямые *AL* и *OQ* параллельные *MP*.



По теореме Фалеса имеем $\frac{SP}{PL} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{LQ}{QC} = \frac{AO}{OC} = 1$. Учитывая, что *SP*:*PC*=1:4, получаем, что $\frac{ST}{TO} = \frac{1}{3}$.

Пусть $K = NT \cap SD$. Так как *SN*:*NB*=*ST*:*TO*=1:3, то в силу теоремы Фалеса прямые *BD* и *NK* параллельны, и, следовательно, *SK*:*KD*=1:3.

2. (*12 баллов*) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{25}x \cdot \log_3 y}{\log_{27}(xy)} = 1, \\ \dfrac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_7(yz)} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\log_{125}z \cdot \log_3 x}{\log_{81}(zx)} = 1. \end{cases}$$

Ответ: x=5, y=25, z=125.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0,\ y > 0,\ z > 0, \\ xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1. \end{cases}$ Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 3\log_5 x \cdot \log_3 y = 2\log_3(xy), \\ 5\log_5 y \cdot \log_7 z = 6\log_7(yz), \\ 4\log_5 z \cdot \log_3 x = 3\log_3(zx). \end{cases} \qquad (1)$$

Сделаем замену: $\begin{cases} \log_5 x = u, \\ \log_5 y = v, \\ \log_5 z = t. \end{cases}$ После преобразований получаем систему $\begin{cases} 3u \cdot v = 2(u+v), \\ 5v \cdot t = 6(v+t), \\ 4t \cdot u = 3(u+t). \end{cases}$ (2). Из первого уравнения системы (2) выразим $v = \frac{2u}{3u-2}$, из третьего уравнения выразим $t = \frac{3u}{4u-3}$. Подставим во второе уравнение системы, получим после преобразований уравнение $u^2 - u = 0$. При u=0 получаем v=t=0, но соответствующие значения x, y, z не удовлетворяют ОДЗ. При u=1 получаем v=2, t=3, следовательно, x=5, y=25, z=125.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Получена система (1) и записано ОДЗ – 2 балла, сделана замена и получена система (2) рациональных уравнений + 5 баллов. Правильно решена система (2) + 4 балла. При правильном ходе решения допущены арифметические ошибки минус 3 балла. Получены посторонние решения (не проверено ОДЗ) ставим 6 баллов.

3. (*13 баллов*) Даны числа x, y, z такие, что $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$. Докажите, что $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a} = (2^x; \sin^2 y; \ln^3 z)$ и $\vec{b} = (1; -4; 8)$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Имеем $|\vec{b}| = \sqrt{1+16+64} = 9$, $|\vec{a}| = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = 5$. Тогда получаем, что $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Обоснованное доказательство – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана последовательность:

$$a_1 = \cos 10°, a_2 = \cos 100°, \ldots, a_n = \cos(10^n)°, \ldots.$$

Найдите наибольшее значение выражения

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x, \text{ где } x \in R.$$

Ответ: 1.

Решение. Покажем, что $a_3 = a_4 = \cdots = a_n$. Если $n \geq 3$, то углы соседних членов последовательности будут отличаться на величину кратную $360°$, действительно:

$10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 - 1) = 9 \cdot 1000 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}$.

Таким образом, $a_{2023} = a_{2024} = a_3 = \cos 1000°$. Далее получаем

$$a_2 + a_{2023} + a_{2024} = \cos 100° + 2\cos 1000° = \cos 100° + 2\cos(360° \cdot 3 - 80) =$$

$= \cos(90° + 10°) + 2\cos 80° = -\sin 10° + 2\sin 10° = \sin 10°$. Тогда

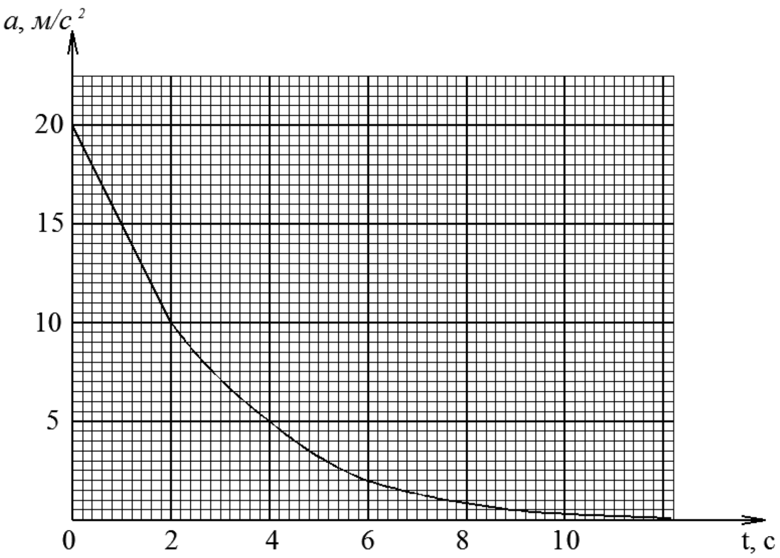
$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10° \cdot \cos x + \sin 10° \cdot \sin x =$$

$= \cos(x - 10°)$. Наибольшее значение равно 1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Доказано, что все члены последовательности равны, начиная с третьего, ставим 6 баллов. Правильно найдено $a_2 + a_{2023} + a_{2024}$ ещё 4 балла. Имеются арифметические ошибки – минус 3 балла.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*15 баллов*) Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените установившуюся скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: 25 м/с.

Решение. График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

В момент времени $t = 2\,c$ ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0$ м/с. **(4 балла)**

Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**

Оценка площади даёт следующий результат: $v_{\text{уст}} = 25$ м/с **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Два маленьких одноименно заряженных шарика удерживают на расстоянии L друг от друга. Заряды шариков q_1 и q_2, их массы m_1 и m_2 соответственно. В определённый момент времени шарики отпускают. Определите их скорости через достаточно продолжительный промежуток времени. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$.

Решение. Закон сохранения импульса: $0 = m_1v_1 - m_2v_2$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $k\frac{q_1q_2}{L} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему, получаем:

$v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, **(2 балла)**

$v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$. **(2 балла)**

7. (*10 баллов*) Одиннадцатиклассник Петя выполнял эксперимент с водяным паром. Он взял пар при температуре T=100°С, поместил его в вертикальный цилиндрический сосуд под невесомый поршень. Поршень Петя установил на высоте h_0=60 см от дна сосуда и отпустил. После установления равновесия поршень оказался на высоте h=15 см, при этом давление пара выросло в 2 раза. Определите массу пара, которую Петя взял для работы. Площадь дна сосуда S=500 см^2.

Ответ: 0,484 кг.

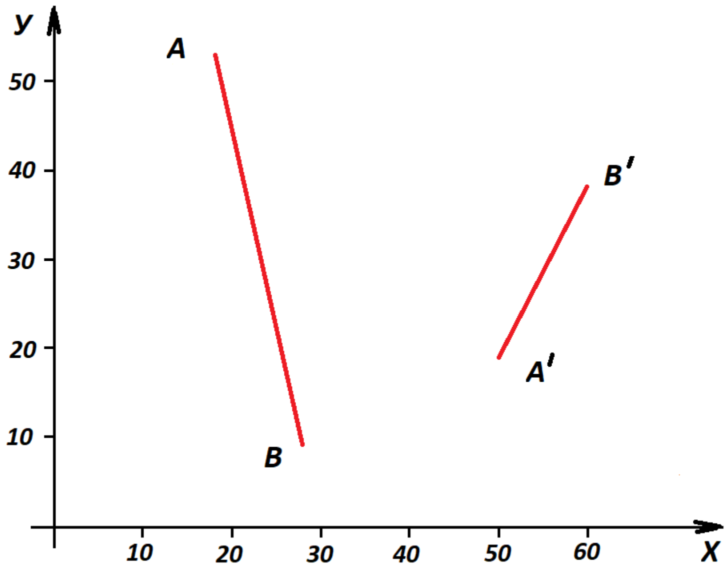
Решение. Давление пара, после установления равновесия при температуре T=100°С, равно атмосферному. **(2 балла)**

Следовательно, пар стал насыщенным. **(2 балла)**

Исходное давление пара: $p = 5 \cdot 10^4$ Па. **(2 балла)**

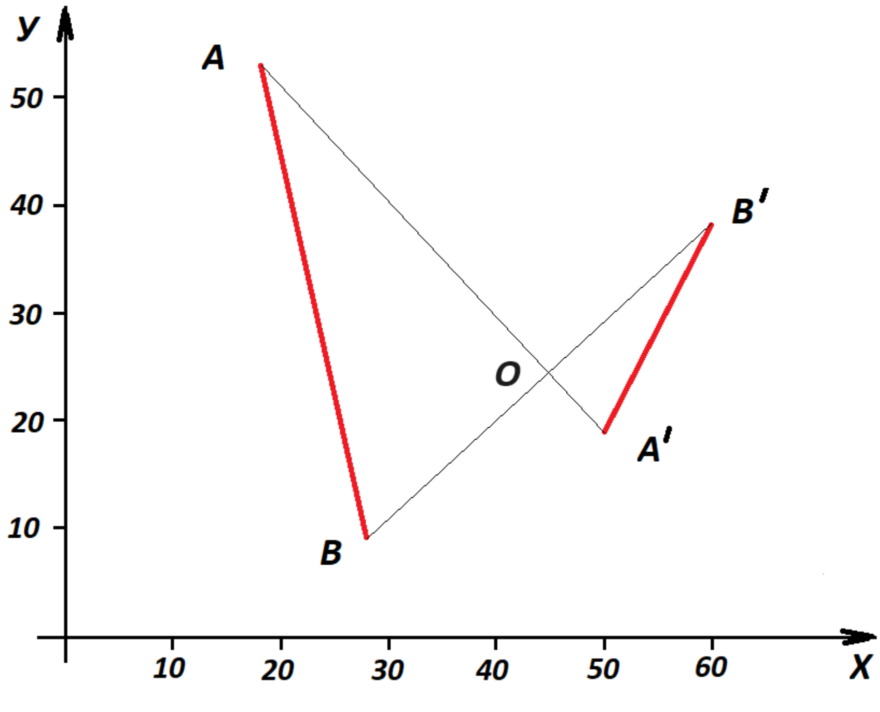
Масса пара: $m = \frac{pVM}{RT} = \frac{pSh_0}{RT} = \frac{5\cdot10^4\cdot500\cdot10^{-4}\cdot0{,}6}{8{,}31\cdot373} = 0{,}484$ кг. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показано местоположение предмета *AB* и его изображения $A^I B^I$, полученного с помощью тонкой линзы. С помощью циркуля и линейки восстановите положение линзы, определите координаты её оптического центра и фокусов. Словами опишите последовательность действий, приводящую к ответу.



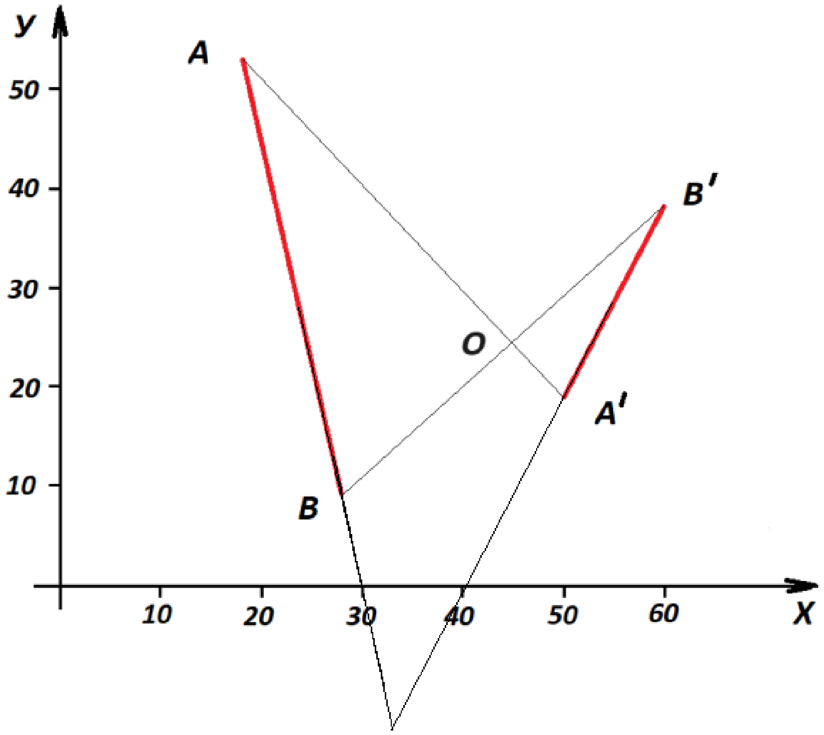
Ответ: оптический центр – (45; 25); фокусы – (38; 26) и (50; 23).

Решение. Соединяем *A* и $A^/$, а также *B* и $B^/$.

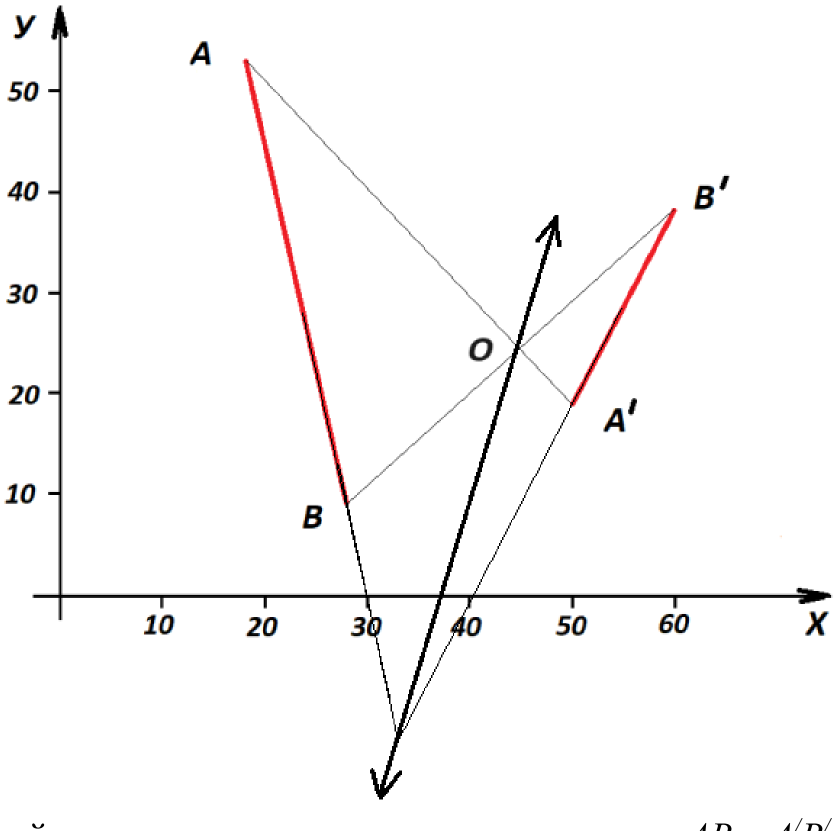


Точка пересечения даёт оптический центр. Его координаты (45; 25). **(4 балла)**

Продолжаем *AB* и $A^/B^/$.

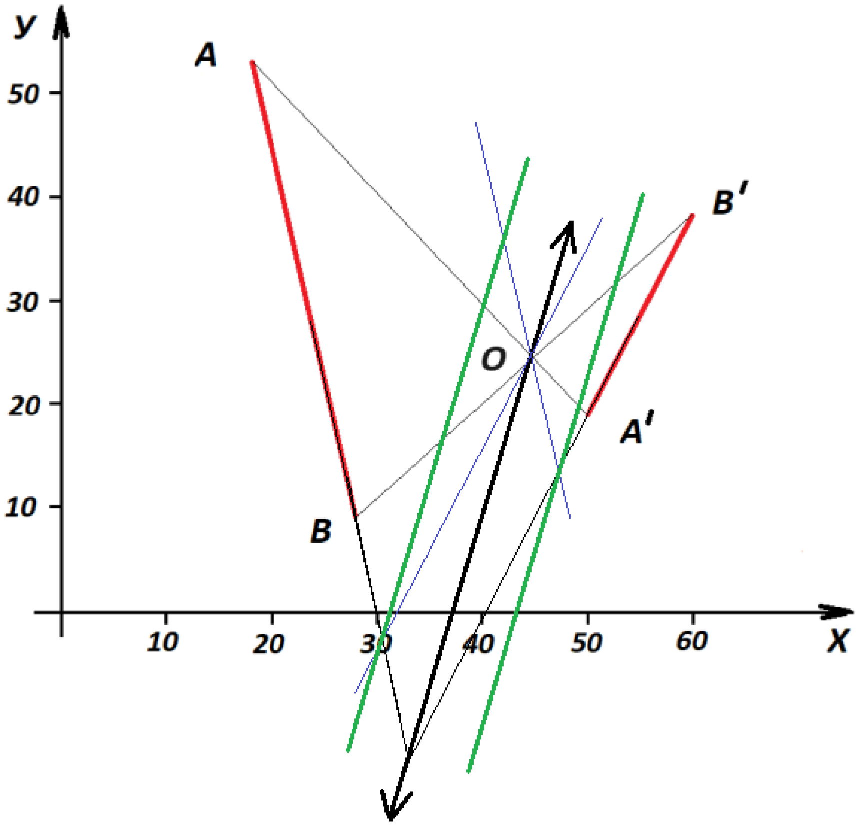


Точка пересечения даёт вторую точку линзы. **(3 балла)**



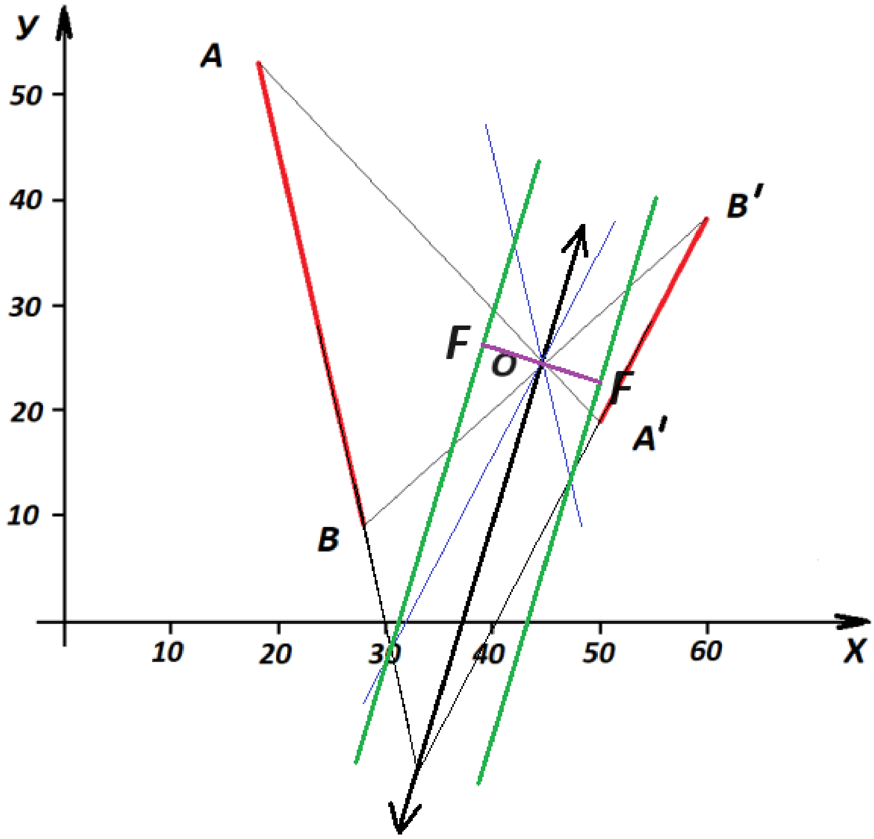
Через оптический центр проводим прямые параллельные AB и $A^{/}B^{/}$. Их пересечения с лучами $A^{/}B^{/}$ и AB дают положения фокальных плоскостей (на рисунке зеленым цветом).

(4 балла)



Из оптического центра опускаем перпендикуляры на фокальные плоскости. Получаем местоположение главных фокусов (38; 26) и (50; 23).

(4 балла)



<u>Примечание:</u> если приведены правильные рассуждения, но ответ отличается от авторского в пределах разумной погрешности, то работа оценивается полным баллом.