6 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

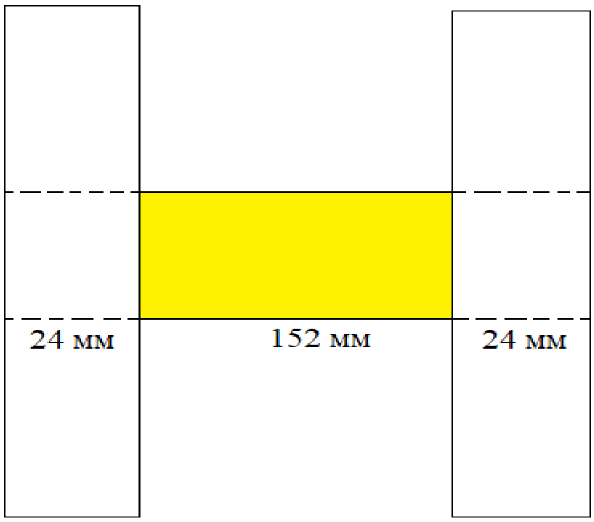
1. (*12 баллов*) Можно ли число 133 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже равнялось бы числу 133? Ответ объясните.

Решение. Пример: 1+1+1+…+1+7+19=133. Здесь 107 единиц. Произведение всех этих чисел равно 133.

Критерии оценивания. Найдено разложение числа 133 на множители – 3 балла. Приведён верный пример – 12 баллов. Если не сказано, сколько единиц в сумме, то минус 4 балла.

2. (*13 баллов*) Стальную плитку размером $200\,мм \times 24\,мм$ обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, используя только эту плитку и карандаш. (Центром прямоугольника является точка пересечения его диагоналей).

Решение. На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 24 *мм*, используя ширину прямоугольника.



Получим новый прямоугольник $152\,мм \times 24\,мм$, центр которого совпадает с центром исходного. Длина его диагонали меньше суммы длин его двух разных сторон, то есть числа 176, а значит, меньше стороны данной плитки. Поэтому можно провести диагонали в новом прямоугольнике с помощью данной плитки и получить искомую точку.

Критерии оценивания. Предложен верный алгоритм нахождения центра прямоугольника – 13 баллов. Доказательства, что центр не изменится, не требуем. Баллы за отсутствие формального обоснования (неравенство треугольника и т.д.) не снимаем.

3. (*12 баллов*) Туристическое агентство составляет 6 маршрутов по городам России. В каждый маршрут должны войти семь городов, причём только четыре города не встречаются ни в одном другом маршруте. Какое максимальное число городов можно включить во все 6 маршрутов?

Ответ: 33.

Решение. Для того чтобы число городов было максимальным, повторяющиеся города должны встречаться минимальное число раз. Число неповторяющихся городов $6 \cdot 4 = 24$. Оставшиеся три города будут встречаться еще в каком-нибудь маршруте, чтобы число городов было максимальным, города должны повторяться только в двух маршрутах, поэтому число повторяющихся городов равно $6 \cdot 3 : 2 = 9,$ тогда городов $24 + 9 = 33.$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Верно найдено количество неповторяющихся городов – 6 баллов. Отмечено, что повторяющиеся города только в двух маршрутах – ещё + 2 балла, найдено верно их количество +2 балла, есть арифметическая ошибка минус 2 балла.

4. (*13 баллов*) Докажите, что если в последовательности

$$1*9*4*3*6*8*6*2*0*2*4$$

вместо звёздочек поставить цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу в любом порядке, получится число, делящееся, на 198. Верно ли, что любое такое число делится на 396? Ответ объясните.

Ответ: Нет.

Решение. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах у полученного числа, равна 45. Сумма цифр, стоящих на четных местах у полученного числа, то есть на местах звездочек, тоже равна 45. По признаку делимости на 11, полученное число делится на 11. Сумма всех цифр полученного числа равна 90, поэтому число делится на 9 по признаку делимости на 9. Отсюда данное число делится на $2 \cdot 9 \cdot 11 = 198$. Если вместо последней звездочки поставить нечетное число, то полученное число не будет делиться на 4 и, следовательно, на 396.

Критерии оценивания. Верное доказательство делимости числа на 198 – 8 баллов. Приведён контрпример для второго вопроса – 5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) В Древней Руси мерой массы воска при продаже в другие страны являлся берковец (1 берковец равен 164 кг), продажа производилась в бочках (1 бочка=0,492 м^3). Известно, что плотность воска ρ=810 кг/м^3 (плотность – это величина равная отношению массы тела m, к его объему V). Запишите плотность воска в берковец на бочку.

Ответ: $2{,}43\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$.

Решение. 1 кг=1/164 берковец ; **(3 балла)**

1м^3=1/0,492 бочки ; **(3 балла)**

$810\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 810\cdot\frac{\frac{1}{164}\text{берковец}}{\frac{1}{0{,}492}\text{бочки}} = 2{,}43\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$. **(4 балла)**

6. (*10 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева увеличить на 50%, мощность плитки увеличить на 25% и массу воды уменьшить на 50%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией? Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: на 275%.

Решение. По условию: $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(3 балла)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c\cdot 1{,}25P\cdot 1{,}5t}{0{,}5m} = 3{,}75\frac{cPt}{m} = 3{,}75\Delta T$. **(3 балла)**

То есть изменение температуры во втором случае будет больше на 275%.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) Автомобиль выехал из города X в 17:46 со скоростью 20 м/с в город Y. В 17:56 в том же направлении выехал второй автомобиль. Через 17 мин расстояние между автомобилями оказалось равным 600 м. Определите скорость второго автомобиля. Полученное значение запишите в метрах на секунду, округлив до целого.

Ответ: 31 м/с; 32 м/с.

Решение. $t_1 = 10\text{ мин} = 600\text{ с}$ – время движения первого автомобиля до момента, когда выехал второй автомобиль. **(2 балла)**

$t = 17\text{ мин} = 17\cdot 60\text{ с} = 1020\text{ с}$, $t_2 = t_1 + t = 600 + 1020 = 1620\text{ с}$ – время движения первого автомобиля. **(2 балла)**

$S_1 = v_1\cdot t_2 = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 1620\text{с} = 32400\text{м}$ – путь, пройденный первым автомобилем.

(3 балла)

Случай 1: $S_2 = S_1 - S = 32400 - 600 = 31800$ м, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{31800\text{ м}}{1020\text{ с}} \approx 31\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

Случай 2: $S_2 = S_1 + S = 32400 + 600 = 33000$ м, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{33000\text{ м}}{1020\text{ с}} \approx 32\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

8. (*15 баллов*) Лыжник, готовясь к старту зимних соревнований, занимался на лыжной трассе, состоящей из двух участков, длины которых отличаются в два раза. После прохождения всей дистанции оказалось, что средняя скорость лыжника составляет 27 км/ч, при этом на втором участке он развил скорость в 1,5 раза больше, чем на первом. Определите скорость лыжника на первом участке трассы.

Ответ: 21 км/ч.

Решение. $v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}$; **(2 балла)**

$t_1 = \frac{S_1}{v_1}$; $t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{2S_1}{1{,}5v_1}$; **(4 балла)**

$v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{S_1+2S_1}{\frac{S_1}{v_1}+\frac{2S_1}{1{,}5v_1}} = \frac{3S_1}{\frac{3{,}5S_1}{1{,}5v_1}} = \frac{4{,}5v_1}{3{,}5} = \frac{9}{7}v_1$; **(5 баллов)**

$v_1 = \frac{7}{9}v_{\text{ср}} = \frac{7}{9}\cdot 27\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 21\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

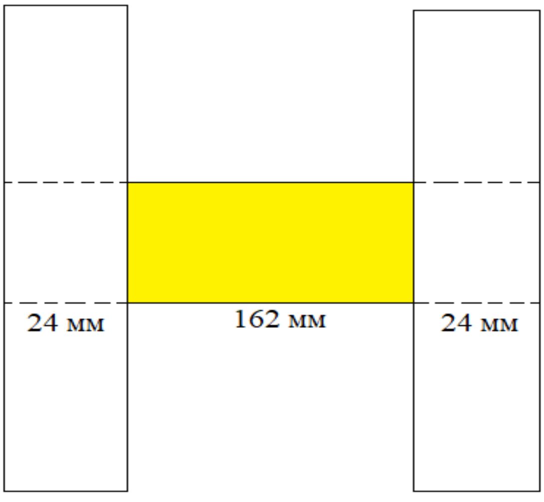
1. (*12 баллов*) Можно ли число 187 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже равнялось бы числу 187? Ответ объясните.

Решение. Пример: 1+1+1+…+1+11+17=187. Здесь 159 единиц. Произведение всех этих чисел равно 187.

Критерии оценивания. Найдено разложение числа 187 на множители – 3 балла. Приведён верный пример – 12 баллов. Если не сказано, сколько единиц в сумме, то минус 4 балла.

2. (*13 баллов*) Стальную плитку размером $210\,мм \times 24\,мм$ обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, используя только эту плитку и карандаш.

Решение. На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 24 *мм*, используя ширину прямоугольника.



Получим новый прямоугольник $162\,мм \times 24\,мм$, центр которого совпадает с центром исходного. Длина его диагонали меньше суммы длин его двух разных сторон, то есть числа 186, а значит, меньше стороны данной плитки. Поэтому можно провести диагонали в новом прямоугольнике с помощью плитки и получить искомую точку.

Критерии оценивания. Предложен верный, обоснованный алгоритм нахождения центра прямоугольника – 13 баллов. Доказательства, что центр не изменится, не требуем. Баллы за отсутствие формального обоснования (неравенство треугольника и т.д.) не снимаем.

3. (*12 баллов*) Туристическое агентство составляет 8 маршрутов по городам России. В каждый маршрут должны войти семь городов, причём только четыре города не встречаются ни в одном другом маршруте. Какое максимальное число городов можно включить во все 8 маршрутов?

Ответ: 44.

Решение. Для того чтобы число городов было максимальным, повторяющиеся города должны встречаться минимальное число раз. Число неповторяющихся городов 8·4=32. Оставшиеся три города будут встречаться еще в каком-нибудь маршруте, чтобы число городов было максимальным, города должны повторяться только в двух маршрутах, поэтому число повторяющихся городов равно 8·3:2=12, тогда городов 32+12=44.

4. (*13 баллов*) Докажите, что если в последовательности

$$1*9*4*3*7*6*7*2*0*2*4$$

вместо звёздочек поставить цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу в любом порядке, получится число, делящееся, на 198. Верно ли, что любое такое число делится на 396? Ответ объясните.

Ответ: Нет.

Решение. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах у полученного числа, равна 45. Сумма цифр, стоящих на четных местах у полученного числа, то есть на местах звездочек, тоже равна 45. По признаку делимости на 11, полученное число делится на 11. Сумма всех цифр полученного числа равна 90, поэтому число делится на 9 по признаку делимости на 9. Отсюда данное число делится на $2\cdot 9\cdot 11=198$. Если вместо последней звездочки поставить нечетное число, то полученное число не будет делиться на 4 и, следовательно, на 396.

Критерии оценивания. Верное доказательство делимости числа на 198 – 8 баллов. Приведён контрпример для второго вопроса – 5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) В Древней Руси мерой массы мёда при продаже в другие страны являлся берковец (1 берковец равен 164 кг), продажа производилась в бочках (1 бочка=0,492 м^3). Известно, что плотность мёда ρ=1450 кг/м^3 (плотность – это величина равная отношению массы тела m, к его объему V). Запишите плотность мёда в берковец на бочку.

Ответ: $4,35\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$.

Решение. 1 кг=1/164 берковец; **(3 балла)**

1м^3=1/0,492 бочки ; **(3 балла)**

$$1450\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1450\cdot\frac{\frac{1}{164}\text{берковец}}{\frac{1}{0,492}\text{бочки}} = 4,35\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$$ **(4 балла)**

6. (*10 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева увеличить на 40%, мощность плитки увеличить на 30% и массу воды уменьшить на 20%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией? Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: на 127,5%.

Решение. По условию: $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(3 балла)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c\cdot 1,3P\cdot 1,4t}{0,8m} = 2,275\frac{cPt}{m} = 2,275\Delta T$. **(3 балла)**

То есть изменение температуры во втором случае будет больше на 127,5%.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) Автомобиль выехал из города *X* в 13:23 со скоростью 25 м/с в город *Y*. В 13:29 в том же направлении выехал второй автомобиль. Через 15 мин расстояние между автомобилями оказалось равным 1500 м. Определите скорость второго автомобиля. Полученное значение запишите в метрах на секунду, округлив до целого.

Ответ: 33 м/с; 37 м/с.

Решение. $t_1 = 6\ \text{мин} = 360\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля до момента, когда выехал второй автомобиль; **(2 балла)**

$t = 15\ \text{мин} = 15\cdot 60\ \text{с} = 900\ \text{с}$, $t_2 = t_1 + t = 360 + 900 = 1260\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля; **(2 балла)**

$S_1 = v_1\cdot t_2 = 25\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 1260\text{с} = 31500\text{м}$ – путь, пройденный первым автомобилем.

(3 балла)

Случай 1: $S_2 = S_1 - S = 31500 - 1500 = 30000$ м, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{30000\ \text{м}}{900\ \text{с}} \approx 33\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

Случай 2: $S_2 = S_1 + S = 31500 + 1500 = 33000$ м, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{33000\ \text{м}}{900\ \text{с}} \approx 37\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

8. (*15 баллов*) Лыжник, готовясь к старту зимних соревнований, занимался на лыжной трассе, состоящей из двух участков, длины которых отличаются в три раза. После прохождения всей дистанции оказалось, что средняя скорость лыжника составляет 32 км/ч, при этом на втором участке он развил скорость в 1,2 раза больше, чем на первом. Определите скорость лыжника на первом участке трассы.

Ответ: 28 км/ч.

Решение. $v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}$; **(2 балла)**

$t_1 = \frac{S_1}{v_1}$; $t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{3S_1}{1{,}2v_1}$; **(4 балла)**

$v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{S_1+3S_1}{\frac{S_1}{v_1}+\frac{3S_1}{1{,}2v_1}} = \frac{4S_1}{\frac{4{,}2S_1}{1{,}2v_1}} = \frac{4{,}8v_1}{4{,}2} = \frac{8}{7}v_1$; **(5 баллов)**

$v_1 = \frac{7}{8}v_{\text{ср}} = \frac{7}{8} \cdot 32\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 28\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **(4 балла)**