Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

8 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Несколько студентов, живущих в общежитии, решили в складчину купить «умную» колонку. Однако, в последний момент двое отказались участвовать и забрали свою долю денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести дополнительно по одной тысяче рублей, чтобы восстановить прежнюю сумму. Сколько стоит колонка, если известно, что она стоит целое число тысяч рублей и её цена заключена в промежутке от 8000 до 20000?

Ответ: 12000.

Решение. Пусть S тыс. рублей – стоимость колонки, а n – количество студентов, участвовавших в закупке первоначально. Тогда $\frac{S}{n}$ тыс. рублей – сумма, которую внёс каждый студент первоначально. Приравнивая сумму, которую забрали два студента к сумме, которую внесли оставшиеся, получаем уравнение $\frac{2S}{n} = n - 2$ или $n^2 - 2n - 2S = 0$. Чтобы уравнение имело только натуральные корни необходимо, чтобы дискриминант $D = 4 + 8S = k^2$, где k – целое число. Для этого $1 + 2S$ должно быть квадратом целого числа. Для заданного в условии промежутка и условия, что S целое, подходит только S=12. Осталось проверить, что этому S соответствует натуральное решение полученного квадратного уравнения. Имеем D=100, $n_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2}$. Следовательно, количество студентов, первоначально участвовавших в закупке равно 6.

Критерии оценивания. Получено квадратное уравнение – 6 баллов. Сделан вывод, что дискриминант является квадратом целого числа +3 балла; если не проверено, что при найденном S получаем натуральное решение – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 80 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 80 цифр так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 999974849505152…7980.

Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 15 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Итак, вычёркиваем ровно 65+15=80 цифр. Полученное число наибольшее.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если правильно найдено количество 9 в начале числа, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

3. (*13 баллов*) Существует ли многоугольник (не обязательно выпуклый) а) с 100 сторонами; б) с 99 сторонами, – такой, что все его стороны можно перечеркнуть одной прямой, не проходящей через его вершины. Ответ обоснуйте.

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Пример очевиден. б) Допустим, такие прямая и многоугольник существуют. Посадим букашку на прямую вне многоугольника и направим ее в сторону многоугольника с тем, чтобы она пересекла многоугольник и оказалась снова снаружи его. После пересечения первой стороны букашка окажется внутри многоугольника, после пересечения второй стороны – вне многоугольника, потом снова внутри, и т.д. После пересечения нечетной по счету стороны букашка окажется внутри многоугольника, в том числе после пересечения 99-й, последней стороны. Чтобы оказаться снаружи, ей надо пересечь еще одну сторону. Противоречие.

Критерии оценивания. Приведён пример в пункте а) – 5 баллов; получено противоречие в пункте б) – 8 баллов.

4. (*13 баллов*) Первый член числовой последовательности равен 4^{2024}, а каждый следующий равен сумме цифр предыдущего члена (в десятичной системе счисления). Чему равен пятый член этой последовательности?

Ответ. 7.

Решение. Все члены этой последовательности имеют одинаковый остаток при делении на 9. Заметим, что при делении на 9: 4^0 имеет одинаковый остаток с 1, 4^1 с 4, 4^2 с 7, 4^3 с 1, 4^4 с 4, и т.д. Происходит зацикливание, причём 4 в степени, делящейся на 3, имеет остаток 1 при делении на 9. Поэтому $4^{2024}=16\cdot4^{2022}$ имеет остаток 7 при делении на 9. Следовательно, все члены данной последовательности имеют остаток 7 при делении на 9.

Так как $4^{2024} < 10^{2024}$, то сумма цифр числа 4^{2024} меньше, чем $9\cdot2024$, т.е. меньше пятизначного числа, а сумма цифр пятизначного числа меньше, чем $9\cdot5=45$. Четвертый член последовательности меньше, чем сумма цифр двузначного числа, т.е. числа 18. Пятый член последовательности – однозначное число, имеющее остаток 7 при делении на 9.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Участник отметил, что остатки от деления на 9 одинаковые – 3 балла; найден остаток при делении на 9 числа 4^{2024} – ставим + 5 баллов. Доказано, что 5-й член последовательности однозначен +5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Имеется два материала с плотностями ρ_1=2000 кг/м^3 и ρ_2=4000 кг/м^3. Из этих материалов было изготовлено два одинаковых по размерам цилиндрических провода. Радиусы проводов R=R_1=R_2=2 см. При этом внутренняя часть одного провода радиусом r=1 см сделана из менее плотного материала, а внешняя из более плотного. У второго провода – наоборот, при таком же размере внутренней части. Определите отношения масс m_1/m_2 этих проводов.

Ответ: 1,4.

Решение. Масса провода $m = \rho V$. **(2 балла)**

Объём внутренней части: $V_{\text{внут}} = S_{\text{внут}}h = \pi r^2 h$. **(2 балла)**

Объём внешней части: $V_{\text{внеш}} = S_{\text{внеш}}h = \pi(R^2 - r^2)h$. **(2 балла)**

Отношение масс проводов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_{\text{внут}} + \rho_2 V_{\text{внеш}}}{\rho_2 V_{\text{внут}} + \rho_1 V_{\text{внеш}}} = \frac{\rho_1 \pi r^2 h + \rho_2 \pi (R^2 - r^2) h}{\rho_2 \pi r^2 h + \rho_1 \pi (R^2 - r^2) h} = \frac{\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2)}{\rho_2 r^2 + \rho_1 (R^2 - r^2)}.$$ **(3 балла)**

В итоге получаем $\frac{m_1}{m_2}$=1,4. **(1 балл)**

6. (*10 баллов*) В кастрюлю налили 2 л воды, взятой при температуре t=0^{0}С, и довели её до кипения за 10 мин. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лёд при температуре t=0^{0}С. И в следующий раз вода начала кипеть только через 15 мин. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{В}}$=4200 Дж/кг·^{0}С, удельная теплота плавления льда λ=3,3·10^5 Дж/кг, плотность воды ρ=1000 кг/м^3.

Ответ: 1,68 кг.

Решение: Масса исходной воды: $m_{\text{В}} = \rho V = 2$ кг. **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем: $\frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1} = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(1 балл)**

Откуда: $m_л = \frac{c_в m_в \Delta T t_2}{t_1(\lambda + c_в \Delta T)} = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 15}{10 \cdot (330000 + 4200 \cdot 100)} = 1{,}68$ кг. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) Для того чтобы тело, полностью погруженное в жидкость, находилось в равновесии, к нему прикладывают силу F=2 Н. Определите плотность тела, если его объем V=1 л, а плотность жидкости $\rho_Ж$=1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.

Ответ: 800 кг/м^3 или 1200 кг/м^3.

Решение. Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж g V = \rho_т V g + F$,

$\rho_т = \frac{\rho_ж g V - F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 - 2}{10 \cdot 0{,}001} = 800\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

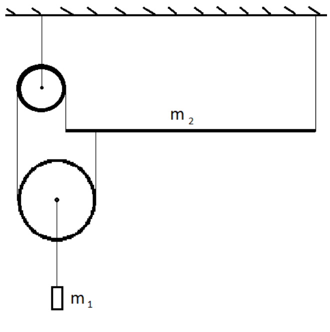
Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж g V + F = \rho_т V g$,

$\rho_т = \frac{\rho_ж g V + F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 + 2}{10 \cdot 0{,}001} = 1200\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция, изображённая на рисунке, находится в равновесии. Известно, что масса груза m_1=1 кг, длина однородного стержня l=50 см. Расстояние между точками крепления левой нити к стержню S=10 см. Определите массу m_2 стержня. Все нити невесомые и нерастяжимые. Блоки – невесомые.



Ответ: 0,2 кг.

Решение. Из условия равновесия для большого блока следует, что сила натяжения левой нити: $T_л = \frac{m_1 g}{2}$. **(5 баллов)**

Условие равновесия для стержня относительно точки крепления правой нити: $T_л \cdot l = T_л \cdot (l - S) + m_2 g \cdot \frac{1}{2} l.$ **(5 баллов)**

В результате, получаем: $m_2 = \frac{m_1 S}{l} = \frac{1 \cdot 10}{50} = 0{,}2$ кг. **(5 баллов)**

8 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Несколько студентов, живущих в общежитии, решили в складчину купить «умную» колонку. Однако, в последний момент двое отказались участвовать и забрали свою долю денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести дополнительно по одной тысяче рублей, чтобы восстановить прежнюю сумму. Сколько стоит колонка, если известно, что она стоит целое число тысяч рублей и её цена заключена в промежутке от 3000 до 10000?

Ответ: 4000.

Решение. Пусть S тыс. рублей – стоимость колонки, а n – количество студентов, участвовавших в закупке первоначально. Тогда $\frac{S}{n}$ тыс. рублей – сумма, которую внёс каждый студент первоначально. Приравнивая сумму, которую забрали два студента к сумме, которую внесли оставшиеся, получаем уравнение $\frac{2S}{n} = n - 2$ или $n^2 - 2n - 2S = 0$. Чтобы уравнение имело только натуральные корни необходимо, чтобы дискриминант $D = 4 + 8S = k^2$, где k – целое число. Для этого $1 + 2S$ должно быть квадратом целого числа. Для заданного в условии промежутка и условия, что S целое, подходит только S=4. Осталось проверить, что этому S соответствует натуральное решение полученного квадратного уравнения. Имеем D=36, n=4. Следовательно, количество студентов, первоначально участвовавших в закупке, равно 4.

Критерии оценивания. Получено квадратное уравнение – 6 баллов. Сделан вывод, что дискриминант является квадратом целого числа +3 балла; если не проверено, что при найденном S получаем натуральное решение – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 81 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 81 цифру так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 99997849505152…798081.

Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 16 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Их 15 цифр. Осталось вычеркнуть одну цифру – цифру 4 в числе 48. Полученное число наибольшее.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если правильно найдено количество 9 в начале числа и следующая 7, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

3. (*13 баллов*) Существует ли многоугольник (не обязательно выпуклый) а) с 80 сторонами; б) с 81 стороной, – такой, что все его стороны можно перечеркнуть одной прямой, не проходящей через его вершины. Ответ обоснуйте.

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Пример очевиден. б) Допустим, такие прямая и многоугольник существуют. Посадим букашку на прямую вне многоугольника и направим ее в сторону многоугольника с тем, чтобы она пересекла многоугольник и оказалась снова снаружи его. После пересечения первой стороны букашка окажется внутри многоугольника, после пересечения второй стороны – вне многоугольника, потом снова внутри, и т.д. После пересечения нечетной по счету стороны букашка окажется внутри многоугольника, в том числе после пересечения 99-й, последней стороны. Чтобы оказаться снаружи, ей надо пересечь еще одну сторону. Противоречие.

Критерии оценивания. Приведён пример в пункте а) – 5 баллов; получено противоречие в пункте б) – 8 баллов.

4. (*13 баллов*) Первый член числовой последовательности равен 7^{2024}, а каждый следующий равен сумме цифр предыдущего члена (в десятичной системе счисления). Чему равен пятый член этой последовательности?

Ответ. 4.

Решение. Все члены этой последовательности имеют одинаковый остаток при делении на 9. Заметим, что при делении на 9: 7^0 имеет одинаковый остаток с 1, 7^1 с 7, 7^2 с 4, 7^3 с 1, 7^4 с 7, и т.д. Происходит зацикливание, причем 7 в степени, делящейся на 3, имеет остаток 1 при делении на 9. Поэтому $7^{2024}=49\cdot7^{2022}$ имеет остаток 4 при делении на 9. Следовательно, все члены данной последовательности имеют остаток 4 при делении на 9.

Так как $7^{2024} < 10^{2024}$, то сумма цифр числа 7^{2024} меньше, чем $9\cdot2024$, т.е. меньше пятизначного числа, а сумма цифр пятизначного числа меньше, чем $9\cdot5=45$. Четвертый член последовательности меньше, чем сумма цифр двузначного числа, т.е. числа 18. Пятый член последовательности – однозначное число, имеющее остаток 4 при делении на 9.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Участник отметил, что остатки от деления на 9 одинаковые – 3 балла; найден остаток при делении на 9 числа 7^{2024} – ставим + 5 баллов. Доказано, что 5-й член последовательности однозначен +5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Имеется два материала с плотностями ρ_1=1500 кг/м^3 и ρ_2=6000 кг/м^3. Из этих материалов было изготовлено два одинаковых по размерам цилиндрических провода. Радиусы проводов R=R_1=R_2=1 см. При этом внутренняя часть одного провода радиусом r=0,25 см сделана из менее плотного материала, а внешняя из более плотного. У второго провода – наоборот, при таком же размере внутренней части. Определите отношения масс m_1/m_2 этих проводов.

Ответ: 3,2.

Решение. Масса провода $m = \rho V$. **(2 балла)**

Объём внутренней части: $V_{\text{внут}} = S_{\text{внут}}h = \pi r^2 h$. **(2 балла)**

Объём внешней части: $V_{\text{внеш}} = S_{\text{внеш}}h = \pi(R^2 - r^2)h$. **(2 балла)**

Отношение масс проводов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_{\text{внут}} + \rho_2 V_{\text{внеш}}}{\rho_2 V_{\text{внут}} + \rho_1 V_{\text{внеш}}} = \frac{\rho_1 \pi r^2 h + \rho_2 \pi (R^2 - r^2)h}{\rho_2 \pi r^2 h + \rho_1 \pi (R^2 - r^2)h} = \frac{\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2)}{\rho_2 r^2 + \rho_1 (R^2 - r^2)},$$ **(3 балла)**

В итоге получаем: $\frac{m_1}{m_2}$ =3,2. **(1 балл)**

6. (*10 баллов*) В кастрюлю налили 3 л воды, взятой при температуре t=0^{0}С, и довели её до кипения за 12 мин. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лёд при температуре t=0^{0}С. И в следующий раз вода начала кипеть только через 15 мин. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоёмкость воды $c_В$=4200 Дж/кг·^{0}С, удельная теплота плавления льда λ=3,3·10^5 Дж/кг, плотность воды ρ=1000 кг/м^3.

Ответ: 2,1 кг.

Решение. Масса исходной воды: $m_В = \rho V = 3$ кг. **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \frac{c_в m_в \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \frac{\lambda m_л + c_в m_л \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем: $\frac{c_в m_в \Delta T}{t_1} = \frac{\lambda m_л + c_в m_л \Delta T}{t_2}$. **(1 балл)**

Откуда: $m_л = \frac{c_в m_в \Delta T t_2}{t_1(\lambda + c_в \Delta T)} = \frac{4200 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 15}{12 \cdot (330000 + 4200 \cdot 100)} = 2{,}1$ кг. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) Для того чтобы тело, полностью погруженное в жидкость, находилось в равновесии, к нему прикладывают силу F=5 Н. Определите плотность тела, если его объём V=1 л, а плотность жидкости $\rho_Ж$=1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.

Ответ: 500 кг/м^3 или 1500 кг/м^3.

Решение. Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV = \rho_т Vg + F,$

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV - F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 - 5}{10 \cdot 0{,}001} = 500\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

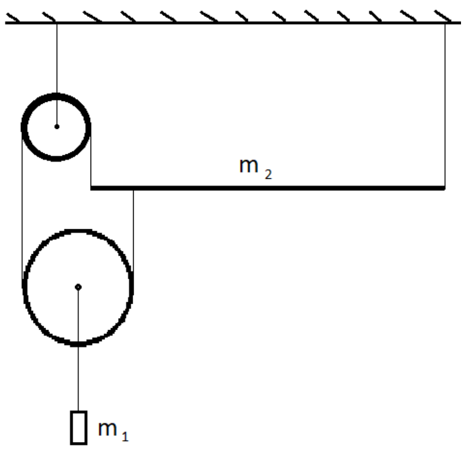
Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV + F = \rho_т Vg,$

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV + F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 + 5}{10 \cdot 0{,}001} = 1500\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция, изображённая на рисунке, находится в равновесии. Известно, что масса однородного стержня m_2=2 кг, а его длина l=50 см. Расстояние между точками крепления левой нити к стержню S=10 см. Определите массу m_1 груза. Все нити невесомые и нерастяжимые. Блоки – невесомые.



Ответ: 10 кг.

Решение. Из условия равновесия для большого блока следует, что сила натяжения левой нити: $T_л = \frac{m_1 g}{2}.$ **(5 баллов)**

Условие равновесия для стержня относительно точки крепления правой нити: $T_л \cdot l = T_л \cdot (l - S) + m_2 g \cdot \frac{1}{2} l$. **(5 баллов)**

В результате, получаем: $m_1 = \frac{m_2 l}{S} = \frac{2 \cdot 50}{10} = 10$ кг. **(5 баллов)**