9 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Найдите все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2; \\ y^2+3=(x+z)^2; \\ z^2+4=(x+y)^2. \end{cases}$$

Ответ. $x=\frac{7}{6}$; $y=1$; $z=\frac{5}{6}$.

Решение. Перенесём правые части уравнений в левую часть и применим формулу «разности квадратов». Обозначив $S=x+y+z$, получим:

$$\begin{cases} (2x-S)S+2=0; \\ (2y-S)S+3=0; \\ (2z-S)S+4=0. \end{cases}$$

Заметим, что по условию S>0. Сложив все уравнения системы, получим: $S^2=9$, $S=3$. Отсюда

$$\begin{cases} x=\frac{S^2-2}{2S}=\frac{7}{6}; \\ y=\frac{S^2-3}{2S}=1; \\ z=\frac{S^2-4}{2S}=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ход решения правильный, но имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

2. (*12 баллов*) В магазине работают два кассовых аппарата. До обеда первый кассир обслужил на 25% меньше покупателей, чем второй, зато после обеда на 20% больше, чем второй кассир. По итогам дня оказалось, что первый кассир обслужил на 10% покупателей больше, чем второй. Общее количество обслуженных двумя кассирами покупателей оказалось меньше 250. Сколько всего покупателей обслужил второй кассир?

Ответ: 90.

Решение. Второй кассир до обеда обслужил количество покупателей кратное 4, так как 25% от этого количества должно быть целым числом. Аналогично число покупателей, обслуженных вторым кассиром после обеда, должно делиться на 5. Пусть второй кассир до обеда обслужил $4x$ покупателей, после обеда – $5y$ покупателей. Тогда первый кассир обслужил соответственно $3x$ и $6y$ покупателей. Кроме того, число $4x+5y$ должно делиться на 10. Следовательно, x кратно 5, а y – чётное. Пусть $x=5a$, $y=2b$, где $a, b \in N$. Так как $3x+6y=\frac{11}{10}(4x+5y)$, получим $15a+12b=\frac{11}{10}(20a+10b)$. Отсюда $b=7a$. Тогда первый кассир обслужил $99a$ покупателей, а второй – $90a$ покупателей. Вместе они обслужили за смену $189a$ покупателей. Из условия, что $189a<250$ находим $a=1$.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Участник заметил, что количество покупателей, обслуженных вторым кассиром, до обеда кратно 4, а после обеда – кратно 5, то ставим 3 балла. Получено основное уравнение +5 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла.

3. (*13 баллов*) На окружности отмечено 2024 точки, точка *A* – одна из них. Каких (выпуклых) многоугольников с вершинами в некоторых из этих точек больше и на сколько: содержащих точку *A* или не содержащих её?

Ответ. Больше многоугольников, содержащих точку *A,* на **2045253**.

Решение. Каждому многоугольнику, не содержащему точку *A*, поставим в соответствие многоугольник, содержащий точку *A,* добавив эту точку к вершинам исходного многоугольника. Получим не все многоугольники с вершиной *A,* а именно, не получим треугольники. Треугольников с вершиной в точке *A* столько, сколько пар точек в множестве из (остальных) 2023 точек, то есть, $\frac{2023 \cdot 2022}{2}=2045253$.

Критерии оценивания. Показано, что содержащих точку *A* больше на количество треугольников, – 7 баллов. Правильно подсчитано их количество – еще 6 баллов. За неподсчитанное произведение в ответе баллов не снимаем.

4. (*13 баллов*) Многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет **три** различных действительных корня. А многочлен $f(g(x))$, где

$$g(x)=x^2+6x+2024$$

действительных корней не имеет. Докажите, что $f(2024)>729$.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 – действительные корни многочлена $f(x)$, то

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Тогда $f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$, где каждый из множителей не обращается в нуль.

Если $g(x) \neq x_1$, то уравнение $x^2 + 6x + 2024 - x_1 = 0$ не имеет корней, и $D = 36 - 4(2024 - x_1) < 0$, следовательно, $2024 - x_1 > 9$.

Аналогично, $2024 - x_2 > 9$ и $2024 - x_3 > 9$. Тогда

$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 9^3 = 729.$$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Правильно записано разложение для многочлена $f(g(x))$ – 5 баллов. Сделан вывод, что каждый множитель не обращается в нуль и, следовательно, дискриминанты меньше нуля +5 баллов, имеются арифметические ошибки – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Маленький шарик запустили с горизонтальной поверхности со скоростью v_0=40 м/с под углом α=60 ^{0} к горизонту. В момент времени, когда скорость шарика стала равной v=30 м/с, он врезался в вертикальную стенку. Считая удар о стенку абсолютно упругим, определите на каком расстоянии от точки запуска шарик упадёт обратно на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 89,4 м.

Решение. Уравнения движения шарика: **(2 балла)**

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - 5t^2,$

$v_x = v_0 \cos\alpha,$

$v_y = v_0 \sin\alpha - 10t.$

Квадрат вертикальной составляющей скорости:

$v_y^2 = v^2 - v_x^2 = (v_0 \sin\alpha - 10t)^2.$ **(2 балла)**

Получаем квадратное уравнение:

$100t^2 - 20v_0 \sin\alpha \cdot t + v_0^2 - v^2 = 0,\ 100t^2 - 20 \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t + 40^2 - 30^2 = 0.$

Получаем, что время, когда шарик врезается в стенку:

$t_1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \approx 1{,}23$ с, **(1 балл)**

$t_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 5{,}70$ с. **(1 балл)**

Расстояние по горизонтали, на котором располагается стенка от точки броска:

$x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}23 \approx 24{,}6$ м, **(1 балл)**

$x_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}70 \approx 114{,}0$ м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полёта шарика:

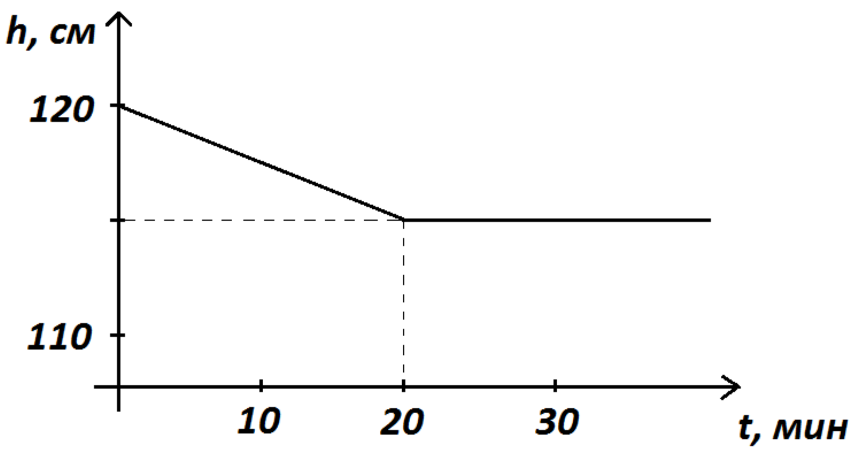
$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{40^2 \sin 120^0}{10} \approx 138{,}6$ м. **(1 балл)**

Окончательный ответ:

$L_1 = S - 2x_1 = 89{,}4$ м, $L_2 = 2x_2 - S = 89{,}4$ м. **(1 балл)**

<u>*Примечание:*</u> *Если решение ограничивается только одним возможным вариантом, то данное решение оценивается максимум 12 баллами.*

6. (*10 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура 0^0C. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда S=15 см^2, плотность воды $\rho_В$=1 г/см^3, плотность льда $\rho_Л$=0,9 г/см^3.



Ответ: масса льда – 675 г, масса воды – 1050 г.

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15 \cdot 5 = 75$ см^3. **(1 балл)**

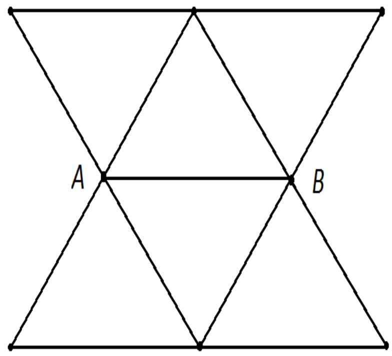
Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился: $\Delta V = V_л - V_в = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в}$. **(3 балла)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_л = \frac{\Delta V \cdot \rho_л \cdot \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 675$ г. **(2 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_к = 115 \cdot 15 = 1725$ см^3. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_в = \rho_в V_к - m_л = 1050$ г. **(2 балла)**

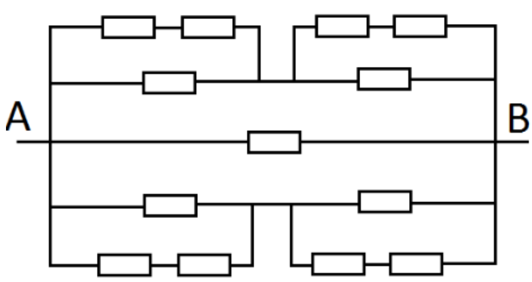
7. (*15 баллов*) Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня R_0=10 Ом. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками A и B.



Ответ: 4 Ом.

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом:

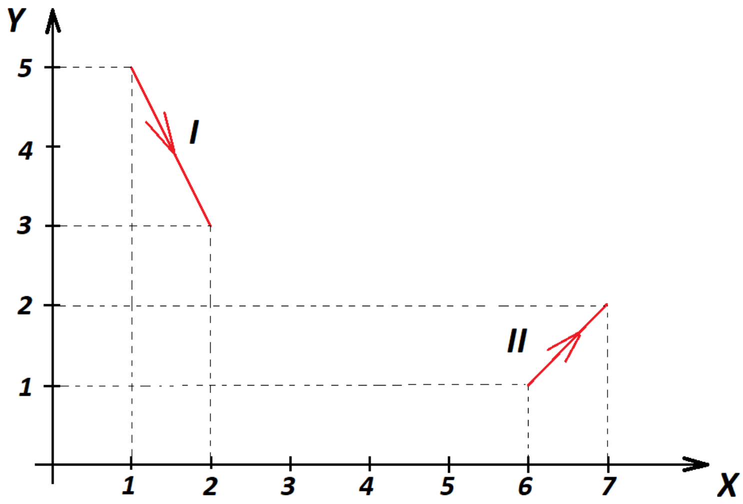
(10 баллов)



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 10$ Ом.

В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 4$ Ом **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть светового луча I, падающего на плоское зеркало, и часть отражённого от него луча II. Рассчитайте координаты точки отражения и угол к горизонту, под которым расположено зеркало.



Ответ: α = –9,2^0.

Решение. Уравнение, падающего на зеркало луча: $y_1 = 7 - 2x$. **(2 балла)**

Уравнение, отражённого от зеркала луча: $y_2 = -5 + x$. **(2 балла)**

В точке отражения от зеркала: $y_1 = y_2$, $7 - 2x = -5 + x$.

Координаты точки отражения: $x_{\text{отр}} = 4$; $y_{\text{отр}} = -1$. **(2 балла)**

Уравнение биссектрисы, проведенной из точки пересечения этих прямых, определяется из равенства: $\frac{y+2x-7}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{y-x+5}{\sqrt{1^2+1^2}}$. **(4 балла)**

Откуда, перпендикуляр к зеркалу: $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}x - \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Само зеркало: $y = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}x + \frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$. **(3 балла)**

Получаем, что угол наклона: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \approx -0{,}162$, **(2 балла)**

$\alpha \approx -9{,}2^0$.

Примечание:

1) *ответ возможен в виде угла или его функции;*

2) *если задача решается построением, а не расчётами, то она оценивается максимум в 6 баллов.*

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Найдите все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2; \\ y^2+1=(x+z)^2; \\ z^2+1=(x+y)^2. \end{cases}$$

Ответ. $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{3}{4}$; $z=\frac{3}{4}$.

Решение. Перенесём правые части уравнений в левую часть и применим формулу «разности квадратов». Обозначив $S=x+y+z$, получим:

$$\begin{cases} (2x-S)S+2=0; \\ (2y-S)S+1=0; \\ (2z-S)S+1=0. \end{cases}$$

Заметим, что по условию S>0. Сложив все уравнения системы, получим: $S^2=4,\ S=2$. Отсюда

$$\begin{cases} x=\dfrac{S^2-2}{2S}=\dfrac{1}{2}; \\ y=\dfrac{S^2-1}{2S}=\dfrac{3}{4}; \\ z=\dfrac{S^2-1}{2S}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ход решения правильный, но имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

2. (*12 баллов*) В магазине работают два кассовых аппарата. До обеда первый кассир обслужил на 25% меньше покупателей, чем второй, зато после обеда на 20% больше, чем второй кассир. По итогам дня оказалось, что первый кассир обслужил на 10% покупателей больше, чем второй. Общее количество обслуженных двумя кассирами покупателей оказалось меньше 250. Сколько всего покупателей обслужил первый кассир?

Ответ: 99.

Решение. Второй кассир до обеда обслужил количество покупателей кратное 4, так как 25% от этого количества должно быть целым числом. Аналогично число покупателей, обслуженных вторым кассиром после обеда, должно делиться на 5. Пусть второй кассир до обеда обслужил $4x$ покупателей, после обеда – $5y$ покупателей. Тогда первый кассир обслужил соответственно $3x$ и $6y$ покупателей. Кроме того, число $4x$+$5y$ должно делиться на 10. Следовательно, x кратно 5, а y – чётное. Пусть x=$5a$, y=$2b$, где $a, b \in N$. Так как $3x + 6y = \frac{11}{10}(4x + 5y)$, получим $15a + 12b = \frac{11}{10}(20a + 10b)$. Отсюда b=$7a$. Тогда первый кассир обслужил $99a$ покупателей, а второй – $90a$ покупателей. Вместе они обслужили за смену $189a$ покупателей. Из условия, что $189a$<250 находим a=1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Участник заметил, что количество покупателей, обслуженных вторым кассиром, до обеда кратно 4, а после обеда – кратно 5, то ставим 3 балла. Получено основное уравнение +5 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла.

3. (*13 баллов*) На окружности отмечено 2025 точек, точка *A* – одна из них. Каких (выпуклых) многоугольников с вершинами в некоторых из этих точек больше и на сколько: содержащих точку *A* или не содержащих её?

Ответ. Больше многоугольников, содержащих точку *A,* на **2047276**.

Решение. Каждому многоугольнику, не содержащему точку *A*, поставим в соответствие многоугольник, содержащий точку *A,* добавив эту точку к вершинам исходного многоугольника. Получим не все многоугольники с вершиной *A,* а именно, не получим треугольники. Треугольников с вершиной в точке *A* столько, сколько пар точек в множестве из (остальных) 2024 точек, то есть, $\frac{2024 \cdot 2023}{2} = 2047276$.

Критерии оценивания. Показано, что содержащих точку *A* больше на количество треугольников, 7 баллов. Правильно подсчитано их количество – еще 6 баллов. За неподсчитанное произведение в ответе баллов не снимаем.

4. (*13 баллов*) Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет **три** различных действительных корня. А многочлен $f(g(x))$, где

$$g(x) = x^2 + 4x + 2024$$

действительных корней не имеет. Докажите, что $f(2024) > 64$.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 – действительные корни многочлена $f(x)$, то

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Тогда $f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$, где каждый из множителей не обращается в нуль.

Если $g(x) \neq x_1$, то уравнение $x^2 + 4x + 2024 - x_1 = 0$ не имеет корней, и $D = 16 - 4(2024 - x_1) < 0$, следовательно, $2024 - x_1 > 4$.

Аналогично, $2024 - x_2 > 4$ и $2024 - x_3 > 4$. Тогда

$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 4^3 = 64.$$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Правильно записано разложение для многочлена $f(g(x))$ – 5 баллов. Сделан вывод, что каждый множитель не обращается в нуль и, следовательно, дискриминанты меньше нуля +5 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Маленький шарик запустили с горизонтальной поверхности со скоростью v_0=30 м/с под углом α=60^0 к горизонту. В момент времени, когда скорость шарика стала равной v=20 м/с, он врезался в вертикальную стенку. Считая удар о стенку абсолютно упругим, определите на каком расстоянии от точки запуска шарик упадёт обратно на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 39,6 м.

Решение. Уравнения движения шарика: **(2 балла)**

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - 5t^2,$

$v_x = v_0 \cos\alpha,$

$v_y = v_0 \sin\alpha - 10t.$

Квадрат вертикальной составляющей скорости:

$v_y^2 = v^2 - v_x^2 = (v_0 \sin\alpha - 10t)^2.$ **(2 балла)**

Получаем квадратное уравнение:

$100t^2 - 20v_0 \sin\alpha \cdot t + v_0^2 - v^2 = 0,\ 100t^2 - 20 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t + 30^2 - 20^2 = 0.$

Получаем, что время, когда шарик врезается в стенку:

$t_1 = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}28$ с, **(1 балл)**

$t_1 = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \approx 3{,}92$ с. **(1 балл)**

Расстояние по горизонтали, на котором располагается стенка от точки броска: $x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 \approx 19{,}2$ м, **(1 балл)**

$x_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}92 \approx 58{,}8$ м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полёта шарика: $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{30^2 \sin 120^0}{10} \approx 77{,}9$ м.

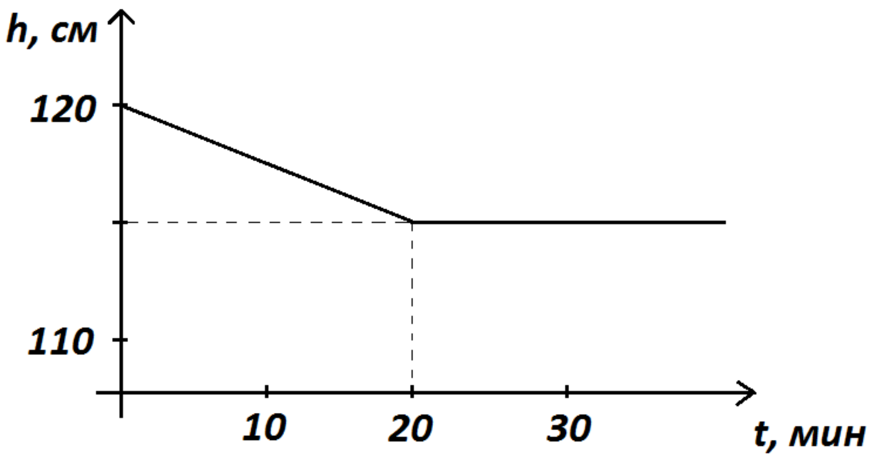
(1 балл)

Окончательный ответ: $L_1 = S - 2x_1 = 39{,}5$ м, $L_2 = 2x_2 - S = 39{,}7$ м.

(1 балл)

Примечание: *Если решение ограничивается только одним возможным вариантом, то данное решение оценивается максимум* 12 *баллами.*

6. (*10 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура 0^0C. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда S=15 см^2, плотность воды $\rho_В$=1 г/см^3, плотность льда $\rho_Л$=0,9 г/см^3.



Ответ: масса льда – 675 г, масса воды – 1050 г.

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15 \cdot 5 = 75$ см^3.

(1 балл)

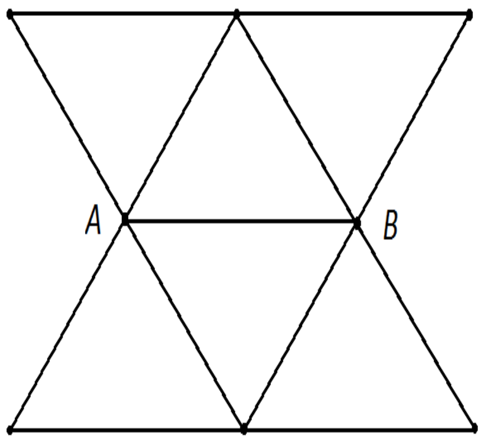
Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился: $\Delta V = V_л - V_в = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в}$. **(3 балла)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_л = \frac{\Delta V \cdot \rho_л \cdot \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 675$ г. **(2 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_к = 115 \cdot 15 = 1725$ см^3. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_в = \rho_в V_к - m_л = 1050$ г. **(2 балла)**

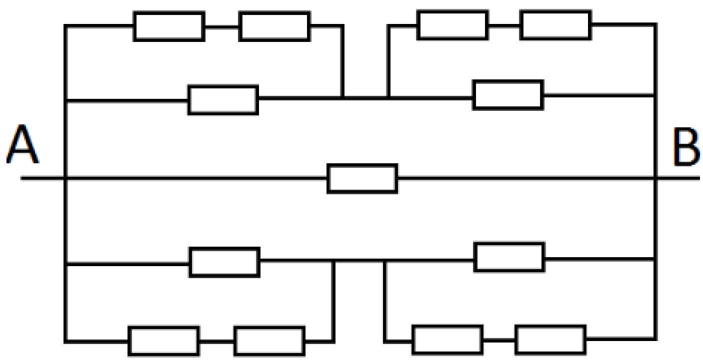
7. (*15 баллов*) Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня R_0=8 Ом. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками A и B.



Ответ: 3,2 Ом.

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом:

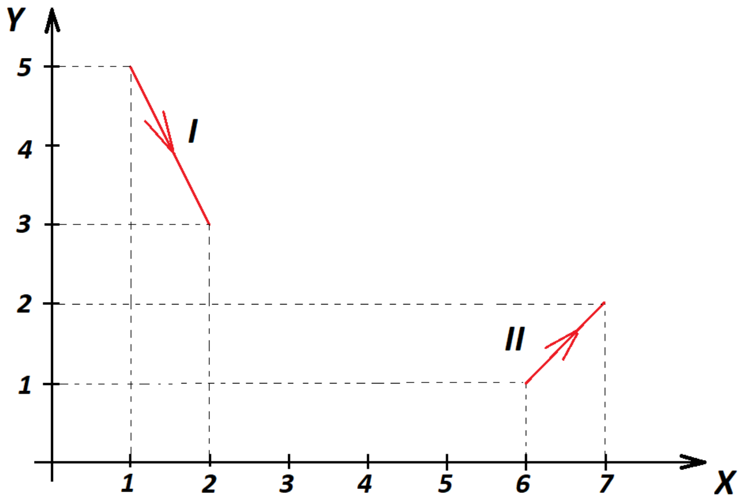
(10 баллов)



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 8$ Ом.

В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 3{,}2$ Ом **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть светового луча I, падающего на плоское зеркало, и часть отражённого от него луча II. Рассчитайте координаты точки отражения и угол к горизонту, под которым расположено зеркало.



Ответ: α = – 9,2^0.

Решение. Уравнение, падающего на зеркало луча: $y_1 = 7 - 2x$. **(2 балла)**

Уравнение, отражённого от зеркала луча: $y_2 = -5 + x$. **(2 балла)**

В точке отражения от зеркала: $y_1 = y_2$, $7 - 2x = -5 + x$.

Координаты точки отражения: $x_{\text{отр}} = 4$; $y_{\text{отр}} = -1$. **(2 балла)**

Уравнение биссектрисы, проведенной из точки пересечения этих прямых, определяется из равенства: $\frac{y+2x-7}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{y-x+5}{\sqrt{1^2+1^2}}$. **(4 балла)**

Откуда, перпендикуляр к зеркалу: $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}x - \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Само зеркало: $y = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}x + \frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$. **(3 балла)**

Получаем, что угол наклона: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \approx -0{,}162$, **(2 балла)**

$\alpha \approx -9{,}2^0$.

Примечание:

1) *ответ возможен в виде угла или его функции;*

2) *если задача решается построением, а не расчётами, то она оценивается максимум в 6 баллов.*