



1. (12 баллов) Решите неравенство

$$9\sqrt{8-7x} - 2|4x-7| \leq 9x - 2|4\sqrt{8-7x} - 7|.$$

Ответ: $\left[1; \frac{8}{7}\right]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$9\sqrt{8-7x} + 2|4\sqrt{8-7x} - 7| \leq 9x + 2|4x-7|.$$

Пусть $f(t) = 9t + 2|4t-7|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f(\sqrt{8-7x}) \leq f(x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрытии модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{8-7x} \leq x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему
$$\begin{cases} 8-7x \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 8-7x \leq x^2. \end{cases}$$
 Получаем $x \in \left[1; \frac{8}{7}\right]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (12 баллов) О треугольнике ABC известно, что длины сторон AB , BC , AC и диаметр вписанной окружности являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите периметр треугольника, если диаметр вписанной окружности равен 6.

Ответ: 36.

Решение. В любом треугольнике диаметр вписанной окружности меньше каждой из сторон треугольника. Пусть 6, AB , BC , AC образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d > 0$, тогда $AB = 6 + d$, $BC = 6 + 2d$, $AC = 6 + 3d$. Полупериметр треугольника $p = 9 + 3d$. Используя формулы площади треугольника

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получаем уравнение $27 + 9d = \sqrt{(9 + 3d)(3 + 2d)(3 + d)3}$.

Тогда $9^2(3 + d)^2 = 9(3 + d)(3 + 2d)(3 + d)$, $(3 + d)(2d^2 - 18) = 0$. Откуда $d = 3$, $p = 18$. В итоге периметр треугольника равен 36.

Критерии оценивания: Отмечен факт, что диаметр вписанной окружности меньше каждой стороны треугольника – 2 балла. Выписаны элементы прогрессии – ещё 1 балл, записано верное уравнение для площадей – 7 баллов. Верный ход решения, но присутствует арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

3. (13 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 1, \\ b + \frac{1}{c} = 4, \\ c + \frac{1}{d} = 1, \\ d + \frac{1}{a} = 4, \end{cases}$$

если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Ответ: $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = \frac{1}{2}, d = 2$.

Решение. Используем неравенства:

$$a + \frac{1}{b} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad b + \frac{1}{c} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad c + \frac{1}{d} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{c}{d}}, \quad d + \frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Перемножим неравенства: $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{d}\right) \cdot \left(d + \frac{1}{a}\right) \geq 2^4 = 4^2$, следовательно, все неравенства превращаются в равенства:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{d} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 0 \text{ или}$$

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{d}, \quad d = \frac{1}{a}.$$

2-ой способ. Вычтем из первого уравнение третье, а из второго четвертое.

$$\begin{cases} a - c + \frac{d-b}{bd} = 0, \\ b - d + \frac{a-c}{ac} = 0, \\ a + \frac{1}{b} = 1, \\ b + \frac{1}{c} = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} a - c + \frac{a-c}{abcd} = 0, \\ d - b = \frac{a-c}{ac}, \\ a + \frac{1}{b} = 1, \\ b + \frac{1}{c} = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} (a-c)\left(1 + \frac{1}{abcd}\right) = 0, \\ d - b = \frac{a-c}{ac}, \\ a + \frac{1}{b} = 1, \\ b + \frac{1}{c} = 4, \end{cases} \quad \text{при условии}$$

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \text{ получаем систему } \begin{cases} a = c, \\ d = b, \\ a + \frac{1}{b} = 1, \\ b + \frac{1}{c} = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} a = c, \\ d = b, \\ a = \frac{b-1}{b}, \\ b + \frac{b}{b-1} = 4, \end{cases}$$

Следовательно,
$$\begin{cases} b = 2, \\ d = 2, \\ a = \frac{1}{2}, \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Критерии оценивания: Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 баллов) Какое наибольшее количество квадратигов 2×2 можно поместить, располагая стороны квадратигов по линиям сетки, в клеточный прямоугольник 25×27 , если любым двум квадратику можно иметь либо одну общую клеточку, либо ни одной?

Ответ: 312.

Решение. Для любой клеточки существует не более чем два квадратика 2×2 , пересекающихся только по этой клеточке, так как если взять хотя бы 3 квадратики, содержащих общую клеточку, то какие-то два из них будут пересекаться по двум клеточкам. Закрасим клеточки во втором, четвертом, шестом и так далее горизонтальном ряду, например, снизу вверх, причем закрашиваем в каждом ряду вторую, четвертую, шестую и так далее клеточки, например, слева направо. Закрашенных клеточек получится $12 \cdot 13 = 156$. Очевидно, что любой квадратик 2×2 , помещенный в данный прямоугольник, содержит ровно одну закрашенную клеточку. На неё может быть наложено, как было замечено, не более двух квадратигов 2×2 , поэтому всего, по данным правилам, квадратигов можно поместить не более 312. *Пример:* укладываем у стороны длиной 25 вплотную друг к другу слева направо ряд из 12 квадратигов; следующий ряд из 12 квадратигов выкладываем со сдвигом на 1 клетку вверх и вправо, следующий ряд – со сдвигом вверх и влево, и так далее.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Приведён пример с правильным ответом 5 баллов.

5. (10 баллов) Мальчик Андрей очень любит играть в футбол и договорился со своим другом Талгатом потренироваться накануне школьного матча. Андрей стоит на расстоянии $S=20$ м от ворот высотой $H=3$ м и бьет по мячу со скоростью $v=20$ м/с. Талгат стоит на воротах и держит руки на расстоянии $h=2,15$ м от земли. Талгат не может менять положение рук относительно тела, но зато может прыгать вверх не более, чем на $d=35$ см. Под каким углом к горизонту Андрей должен пнуть мяч, чтобы Талгат не поймал его, и при этом Андрей забил гол? Считать, что движение мяча происходит в плоскости рисунка. Мяч считать точечным. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².



Решение:

Запишем уравнения движения по параболе для тела, брошенного под углом α к горизонту, и выразим α через координаты тела (x, y) и его скорость v :

$$x = v \cos \alpha t \quad (1 \text{ балл})$$

$$y = v \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Тогда:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2} - \frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g(2yv^2 + gx^2)}}{gx}. \quad (1 \text{ балл})$$

По условию $h + d < y < H$.

Найдем все α , для которых $y = H$ и $y = h + d$.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{10 - 2\sqrt{15}}{5}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{10 + 2\sqrt{15}}{5}. \quad (1 \text{ балл})$$

Так как $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$, то на данном промежутке $\operatorname{tg} \alpha$ монотонно возрастает.

Расположим α в порядке возрастания угла (или же, что то же самое, в порядке возрастания тангенсов):

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2$$

Так как до $\alpha = 45^\circ$ координата y возрастает, а потом убывает, то справедливо будет сказать, что $\alpha \in (\alpha_1; \alpha_3) \cup (\alpha_4; \alpha_2)$.

Получаем:

$$\arctan\left(\frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \arctan\left(\frac{10 - 2\sqrt{15}}{5}\right); \arctan\left(\frac{10 + 2\sqrt{15}}{5}\right) < \alpha < \arctan\left(\frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right). \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Ответ: } 22,3^\circ < \alpha < 24,3^\circ \text{ и } 74,34^\circ < \alpha < 74,4^\circ$$

6. (10 баллов) Тепловую машину, КПД которой $\eta=0,4$, запустили в обратном направлении. С её помощью $m=2$ кг воды, взятой при температуре $t_0=0^\circ\text{C}$, заморозили, получив лёд с такой же температурой. На сколько градусов нагрелся в результате воздух в комнате? Теплоёмкость воздуха $C=150$ кДж/К, удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

Решение:

$$\text{КПД тепловой машины } \eta = \frac{Q_+ - |Q_-|}{Q_+} = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}, \text{ где:} \quad (3 \text{ балла})$$

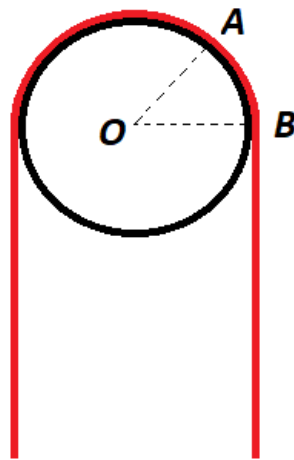
$Q_- = \lambda m$ (энергия, полученная холодильником за счет замораживания воды), (3 балла)

$Q_+ = C \Delta t$ (энергия, отданная холодильником на нагрев воздуха в комнате на Δt) (3 балла)

$$\text{Тогда } \Delta t = \frac{\lambda m}{(1-\eta)C} = \frac{330000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} * 2 \text{ кг}}{(1-0,4) * 150000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}} \approx 7,33^\circ\text{C}. \quad (1 \text{ балл})$$

Ответ: $\approx 7,33^\circ\text{C}$

7. (15 баллов) Канат массой $m=2 \text{ кг}$ и длиной $l=1,5 \text{ м}$ лежит на гладком закреплённом блоке, ось O которого горизонтальна. Определите силу натяжения каната в точке A . Известно, что угол AOB равен 45° . Радиус блока $R=8 \text{ см}$.



Решение:

Применим метод виртуальных перемещений.

Возьмем отрезок каната AC (см. рисунок) и сместим его на малую величину Δx .

Тогда совершенная работа $A = T \Delta x$, где T – сила натяжения каната в точке A .

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли кусочек Δx , отрезали его от каната снизу и переставили бы его к верхней части.

Работа по такому перемещению Δx может быть записана:

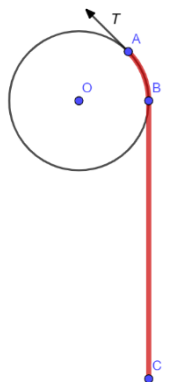
$$A = T \Delta x = \Delta m g h. \quad (3 \text{ балла})$$

$$h = BC + OA \sin \angle AOB = \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} \right) + R \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3 \text{ балла})$$

$$\Delta m = \Delta x \frac{m}{l} \quad (3 \text{ балла})$$

Тогда:

$$T = \frac{m}{l} g h = \frac{m}{2l} g (l + R(\sqrt{2} - \pi)). \quad (3 \text{ балла})$$

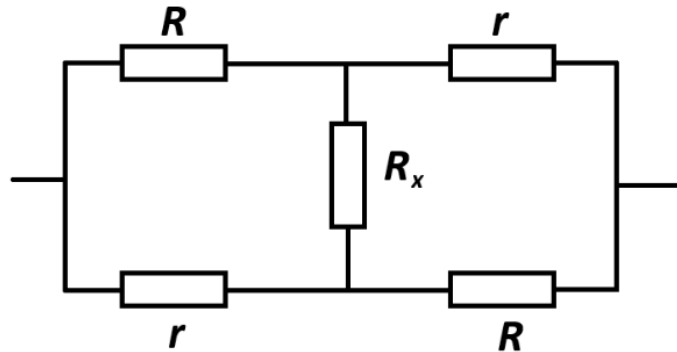


Получаем:

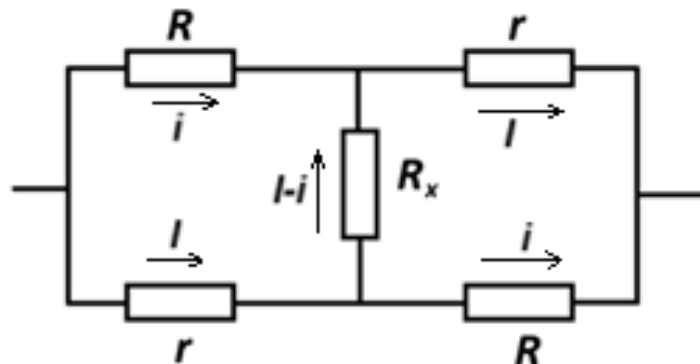
$$T = \frac{2}{2 \cdot 1,5} \cdot 10 \cdot (1,5 + 0,08(\sqrt{2} - 3,14)) \approx 9 \text{ Н.} \quad (3 \text{ балла})$$

Ответ: $\approx 9 \text{ Н}$

8. (15 баллов) В предложенной схеме известны значения сопротивлений $R=4,5 \text{ Ом}$ и $r=2 \text{ Ом}$. Кроме того, известно, что сопротивление всей схемы равно сопротивлению среднего резистора R_x . Определите значение R_x .



Решение:



Расставим токи в цепи, обратив внимание на симметрию: (2 балла)

Составим и решим систему уравнений (запишем правило Кирхгофа для цепи):

$$(1) \quad iR + Ir = u \Rightarrow i = \frac{u}{R} - \frac{Ir}{R} \quad (4) \quad (2 \text{ балла})$$

$$(2) \quad (I + i)R_x = u \quad (2 \text{ балла})$$

$$(3) \quad 2Ir + R_x(I - i) = u \quad (2 \text{ балла})$$

Подставим (4) в (2):

$$\left(I + \frac{u - Ir}{R}\right) R_x = u \Rightarrow I = \frac{u}{R_x} \frac{R - R_x}{R - r} \quad (5) \text{ — значение } I \text{ через известные величины и } R_x.$$

Подставим (5) в (4):

$$i = \frac{u}{R} - \frac{r}{R} \frac{u}{R_x} \frac{(R - R_x)}{R - r} \quad (6) \text{ — значение } i \text{ через известные величины и } R_x$$

Подставим (5) и (6) в (3) и решим получившееся уравнение относительно R_x :

$$2 \frac{u}{R_x} \frac{R-R_x}{R-r} r + R_x \left(\frac{u}{R_x} \frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{u}{R} - \frac{r}{R} \frac{u}{R_x} \frac{(R-R_x)}{R-r} \right) \right) = u \quad | * \frac{R_x}{u}$$

$$2 \frac{R-R_x}{R-r} r + R_x \left(\frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{R_x}{R} - \frac{r}{R} \frac{(R-R_x)}{R-r} \right) \right) = R_x$$

$$2 \frac{Rr}{R-r} - 2 \frac{R_x r}{R-r} + \frac{R R_x}{R-r} - \frac{R_x^2}{R-r} - \left(\frac{R_x^2}{R} - \frac{R_x r}{R-r} + \frac{r R_x^2}{R(R-r)} \right) = R_x$$

$$R_x^2 \left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R} + \frac{r}{R(R-r)} \right) + R_x \left(1 + 2 \frac{r}{R-r} - \frac{R}{R-r} - \frac{r}{R-r} \right) - 2 \frac{Rr}{R-r} = 0$$

$$R_x^2 \frac{R+(R-r)+r}{(R-r)R} + R_x \left(1 + \frac{r-R}{R-r} \right) - 2 \frac{Rr}{R-r} = 0 \quad | * \frac{2}{R-r}$$

$$R_x^2 - Rr = 0$$

Получили:

$$R_x = \sqrt{Rr} \quad (5 \text{ баллов})$$

Окончательно:

$$R_x = \sqrt{4,5 \text{ Ом} \cdot 2 \text{ Ом}} = 3 \text{ Ом}. \quad (2 \text{ балла})$$

Ответ: 3 Ом



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Решите неравенство

$$7\sqrt{4-3x} - 3|2x-5| \leq 7x - 3|2\sqrt{4-3x} - 5|.$$

Ответ: $\left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{4-3x} + 3|2\sqrt{4-3x} - 5| \leq 7x + 3|2x-5|.$$

Пусть $f(t) = 7t + 3|2t-5|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f(\sqrt{4-3x}) \leq f(x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрытии модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{4-3x} \leq x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему

$$\begin{cases} 4-3x \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 4-3x \leq x^2. \end{cases}$$

Получаем $x \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (12 баллов) О треугольнике ABC известно, что длины сторон AB , BC , AC и диаметр вписанной окружности являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите периметр треугольника, если диаметр вписанной окружности равен 8.

Ответ: 48.

Решение. В любом треугольнике диаметр вписанной окружности меньше каждой из сторон треугольника. Пусть 8, AB , BC , AC образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d > 0$, тогда $AB = 8 + d$, $BC = 8 + 2d$, $AC = 8 + 3d$. Полупериметр треугольника $p = 12 + 3d$. Используя формулы площади треугольника

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получаем уравнение $48 + 12d = \sqrt{(12+3d)(4+2d)(4+d)4}$.

Тогда $12^2(4+d)^2 = 12(4+d)(4+2d)(4+d)$, $(4+d)(2d^2-32) = 0$, откуда $d = 4$, $p = 24$. В итоге периметр треугольника равен 48.

Критерии оценивания: Отмечен факт, что диаметр вписанной окружности меньше каждой стороны треугольника – 2 балла. Выписаны элементы прогрессии – ещё 1 балл,

записано верное уравнение для площадей – 7 баллов. Верный ход решения, но присутствует арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

3. (13 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 4, \\ b + \frac{1}{c} = 1, \\ c + \frac{1}{d} = 4, \\ d + \frac{1}{a} = 1, \end{cases}$$

если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Ответ: $a = 2, b = \frac{1}{2}, c = 2, d = \frac{1}{2}$.

Решение. Используем неравенства:

$$a + \frac{1}{b} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad b + \frac{1}{c} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad c + \frac{1}{d} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{c}{d}}, \quad d + \frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Перемножим неравенства: $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{d}\right) \cdot \left(d + \frac{1}{a}\right) \geq 2^4 = 4^2$, следовательно, все неравенства превращаются в равенства:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2 = 0, \left(\sqrt{d} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 0 \text{ или}$$

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{d}, \quad d = \frac{1}{a}.$$

2-ой способ. Вычтем из первого уравнение третье, а из второго четвертое.

$$\begin{cases} a - c + \frac{d-b}{bd} = 0, \\ b - d + \frac{a-c}{ac} = 0, \\ a + \frac{1}{b} = 4, \\ b + \frac{1}{c} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a - c + \frac{a-c}{abcd} = 0, \\ d - b = \frac{a-c}{ac}, \\ a + \frac{1}{b} = 4, \\ b + \frac{1}{c} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (a-c)\left(1 + \frac{1}{abcd}\right) = 0, \\ d - b = \frac{a-c}{ac}, \\ a + \frac{1}{b} = 4, \\ b + \frac{1}{c} = 1, \end{cases} \quad \text{при условии}$$

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \text{ получаем систему } \begin{cases} a = c, \\ d = b, \\ a + \frac{1}{b} = 4, \\ b + \frac{1}{c} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = c, \\ d = b, \\ a = \frac{4b-1}{b}, \\ b + \frac{1}{4b-1} = 1, \end{cases}$$

Следовательно,
$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}, \\ d = \frac{1}{2}, \\ a = 2, \\ c = 2. \end{cases}$$

Критерии оценивания: Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 баллов) Какое наибольшее количество квадратилов 2×2 можно поместить, располагая стороны квадратилов по линиям сетки, в клеточный прямоугольник 25×23 , если любым двум квадратикам можно иметь либо одну общую клеточку, либо ни одной?

Ответ: 264.

Решение. Для любой клеточки существует не более чем два квадратика 2×2 , пересекающихся только по этой клеточке, так как если взять хотя бы 3 квадрата, содержащих общую клеточку, то какие-то два из них будут пересекаться по двум клеточкам. Закрасим клеточки во втором, четвертом, шестом и так далее горизонтальном ряду, например, снизу вверх, причем закрашиваем в каждом ряду вторую, четвертую, шестую и так далее клеточки, например, слева направо. Закрашенных клеточек получится $12 \cdot 11 = 132$. Очевидно, что любой квадратик 2×2 , помещенный в данный прямоугольник, содержит ровно одну закрашенную клеточку. На неё может быть наложено, как было замечено, не более двух квадратилов 2×2 , поэтому всего, по данным правилам, квадратилов можно поместить не более 264. *Пример:* укладываем у стороны длиной 25 вплотную друг к другу слева направо ряд из 12 квадратилов; следующий ряд из 12 квадратилов выкладываем со сдвигом на 1 клетку вверх и вправо, следующий ряд – со сдвигом вверх и влево, и так далее.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Приведён пример с правильным ответом 5 баллов.

5. (10 баллов). Мальчик Андрей очень любит играть в футбол и договорился со своим другом Талгатом потренироваться накануне школьного матча. Андрей стоит на расстоянии $S=20$ м от ворот высотой $H=3$ м и бьет по мячу со скоростью $v=20$ м/с. Талгат стоит на воротах и держит руки на расстоянии $h=2,15$ м от земли. Талгат не может менять положение рук относительно тела, но зато может прыгать вверх не более, чем на $d=35$ см. Под каким углом к горизонту Андрей должен пнуть мяч, чтобы Талгат не поймал его, и при этом Андрей забил гол? Считать, что движение мяча происходит в плоскости рисунка. Мяч считать точечным. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².



Решение:

Запишем уравнения движения по параболе для тела, брошенного под углом α к горизонту, и выразим α через координаты тела (x, y) и его скорость v :

$$x = v \cos \alpha t \quad (1 \text{ балл})$$

$$y = v \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Тогда:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2} - \frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g(2yv^2 + gx^2)}}{gx}. \quad (1 \text{ балл})$$

По условию $h + d < y < H$.

Найдем все α , для которых $y = H$ и $y = h + d$.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{10 - 2\sqrt{15}}{2}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{10 + \sqrt{15}}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Так как $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$, то на данном промежутке $\operatorname{tg} \alpha$ монотонно возрастает.

Расположим α в порядке возрастания угла (или же, что то же самое, в порядке возрастания тангенсов):

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4$$

Так как до $\alpha = 45^\circ$ координата y возрастает, а потом убывает, то справедливо будет сказать, что $\alpha \in (\alpha_1; \alpha_3) \cup (\alpha_2; \alpha_4)$.

Получаем:

$$\arctan\left(\frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \arctan\left(\frac{10 - 2\sqrt{15}}{2}\right); \arctan\left(\frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \arctan\left(\frac{10 + 2\sqrt{15}}{2}\right). \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Ответ: } 22,3^\circ < \alpha < 48,5^\circ \text{ и } 74,4^\circ < \alpha < 83,5^\circ$$

6. (10 баллов). Тепловую машину, КПД которой $\eta=0,5$, запустили в обратном направлении. С её помощью $m=3$ кг воды, взятой при температуре $t_0=0^\circ\text{C}$, заморозили, получив лёд с такой же температурой. На сколько градусов нагрелся в результате воздух в комнате? Теплоёмкость воздуха $C=150$ кДж/К, удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

Решение:

$$\text{КПД тепловой машины } \eta = \frac{Q_+ - |Q_-|}{Q_+} = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}, \text{ где:} \quad (3 \text{ балла})$$

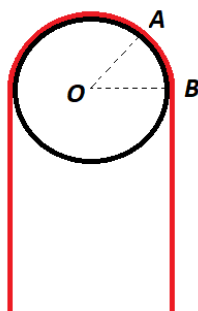
$Q_- = \lambda m$ (энергия, полученная холодильником за счет замораживания воды), (3 балла)

$Q_+ = C \Delta t$ (энергия, отданная холодильником на нагрев воздуха в комнате на Δt). (3 балла)

$$\text{Тогда } \Delta t = \frac{\lambda m}{(1-\eta)C} = \frac{330000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 3 \text{ кг}}{(1-0,5) \cdot 150000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}} = 13,2^\circ\text{C}. \quad (1 \text{ балл})$$

Ответ: $13,2^\circ\text{C}$

7. (15 баллов). Канат массой $m=1$ кг и длиной $l=2$ м лежит на гладком закрепленном блоке, ось O которого горизонтальна. Определите силу натяжения каната в точке A . Известно, что угол AOB равен 45° . Радиус блока $R=10$ см.



Решение:

Применим метод виртуальных перемещений.

Возьмем отрезок каната AC (см. рисунок) и сместим его на малую величину Δx .

Тогда совершенная работа $A = T \Delta x$, где T – сила натяжения каната в точке A .

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли кусочек Δx , отрезали его от каната снизу и переставили бы его к верхней части.

Работа по такому перемещению Δx может быть записана:

$$A = T \Delta x = \Delta m g h. \quad (3 \text{ балла})$$

$$h = BC + OA \sin \angle AOB = \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} \right) + R \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3 \text{ балла})$$

$$\Delta m = \Delta x \frac{m}{l} \quad (3 \text{ балла})$$

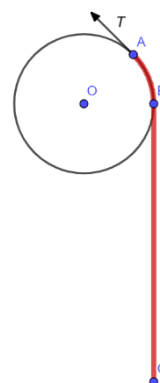
Тогда:

$$T = \frac{m}{l} g h = \frac{m}{2l} g (l + R(\sqrt{2} - \pi)). \quad (3 \text{ балла})$$

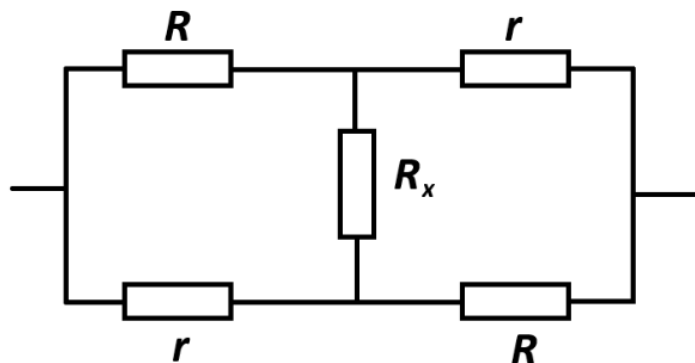
Получаем:

$$T = \frac{2}{2 \cdot 1,5} \cdot 10 \cdot (1,5 + 0,08(\sqrt{2} - 3,14)) \approx 4,6 \text{ Н}. \quad (3 \text{ балла})$$

Ответ: $\approx 4,6 \text{ Н}$



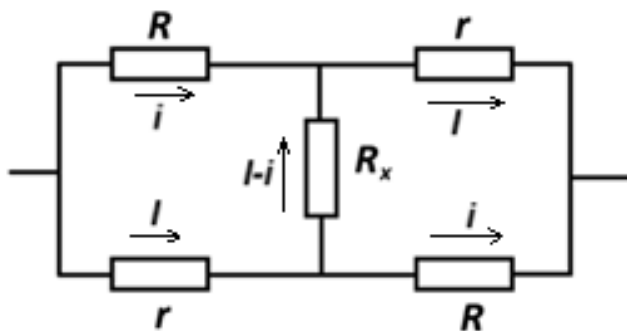
8. (15 баллов). В предложенной схеме известны значения сопротивлений $R=16$ Ом и $r=4$ Ом. Кроме того, известно, что сопротивление всей схемы равно сопротивлению среднего резистора R_x . Определите значение R_x .



Решение:

Расставим токи в цепи, обратив внимание на симметрию:

(2 балла)



Составим и решим систему уравнений (запишем правило Кирхгофа для цепи):

$$(4) \quad iR + Ir = u \Rightarrow i = \frac{u}{R} - \frac{Ir}{R} \quad (4) \quad \textbf{(2 балла)}$$

$$(5) \quad (I + i)R_x = u \quad \textbf{(2 балла)}$$

$$(6) \quad 2Ir + R_x(I - i) = u \quad \textbf{(2 балла)}$$

Подставим (4) в (2):

$$\left(I + \frac{u - Ir}{R}\right) R_x = u \Rightarrow I = \frac{u}{R_x} \frac{R - R_x}{R - r} \quad (5) \text{ – значение } I \text{ через известные величины и } R_x.$$

Подставим (5) в (4):

$$i = \frac{u}{R} - \frac{r}{R} \frac{u}{R_x} \frac{(R - R_x)}{R - r} \quad (6) \text{ – значение } i \text{ через известные величины и } R_x$$

Подставим (5) и (6) в (3) и решим получившееся уравнение относительно R_x :

$$2 \frac{u}{R_x} \frac{R - R_x}{R - r} r + R_x \left(\frac{u}{R_x} \frac{R - R_x}{R - r} - \left(\frac{u}{R} - \frac{r}{R} \frac{u}{R_x} \frac{(R - R_x)}{R - r} \right) \right) = u \quad | * \frac{R_x}{u}$$

$$2 \frac{R - R_x}{R - r} r + R_x \left(\frac{R - R_x}{R - r} - \left(\frac{R_x}{R} - \frac{r}{R} \frac{(R - R_x)}{R - r} \right) \right) = R_x$$

$$2 \frac{Rr}{R-r} - 2 \frac{R_x r}{R-r} + \frac{R R_x}{R-r} - \frac{R_x^2}{R-r} - \left(\frac{R_x^2}{R} - \frac{R_x r}{R-r} + \frac{r R_x^2}{R(R-r)} \right) = R_x$$

$$R_x^2 \left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R} + \frac{r}{R(R-r)} \right) + R_x \left(1 + 2 \frac{r}{R-r} - \frac{R}{R-r} - \frac{r}{R-r} \right) - 2 \frac{Rr}{R-r} = 0$$

$$R_x^2 \frac{R+(R-r)+r}{(R-r)R} + R_x \left(1 + \frac{r-R}{R-r} \right) - 2 \frac{Rr}{R-r} = 0 \quad | * \frac{2}{R-r}$$

$$R_x^2 - Rr = 0$$

Получили:

$$R_x = \sqrt{Rr} \quad (5 \text{ баллов})$$

Окончательно:

$$R_x = \sqrt{16 \text{ Ом} \cdot 4 \text{ Ом}} = 8 \text{ Ом}. \quad (2 \text{ балла})$$

Ответ: 8 Ом