



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7|.$$

Ответ: $[2; 4]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} + 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|.$$

Пусть $f(t) = 9t + 2|4t - 7|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f(\sqrt{2 - \log_2 x}) \leq f(\log_2 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрытии модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2 - \log_2 x} \leq \log_2 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему
$$\begin{cases} 2 - \log_2 x \geq 0, \\ \log_2 x \geq 0, \\ 2 - \log_2 x \leq \log_2^2 x. \end{cases}$$
 Получаем $x \in [2; 4]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 8×12 . У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{49}}{3^{96}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p = \frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n = 3^{96}$, так как всего в прямоугольнике 96 клеток, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m . Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 48 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{48} , а всего $m = 2^{49}$.

Критерии оценивания. Верно найдено $n - 3$ балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m , а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x . Найдите наименьшее значение выражения $2a + b + 1$.

Ответ: 3.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x , то $(a + 1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$\begin{aligned} 2a + b + 1 &\geq 2a + \frac{(a + 1)^2}{4a} + 1 = \frac{8a^2 + (a + 1)^2 + 4a}{4a} = \frac{9a^2 + 6a + 1}{4a} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{9a^2 + 1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2}}{2a} = 3, \end{aligned}$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером $6 \times 7 \times 11$, разбитый на единичные кубики, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 22.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 5, 6 и 10 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M . Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α . Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 5, 6 и 11 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $5 + 6 + 10 = 21$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $21 + 1 = 22$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 баллов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q , двигаясь вертикально вверх со скоростью v , в момент времени $t=0$ на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B . В тот момент, когда частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E , и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h . Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица движется в магнитном поле:

$$F_{\text{л}} = ma_{\text{ц}}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$Bqv = m \frac{v^2}{R}. \quad (1 \text{ балл})$$

Получаем:

$$R = \frac{mv}{Bq}. \quad (1 \text{ балл})$$

Время движения в магнитном поле:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}. \quad (1 \text{ балл})$$

Частица движется в электрическом поле:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$R = \frac{at_2^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Время движения в электрическом поле:

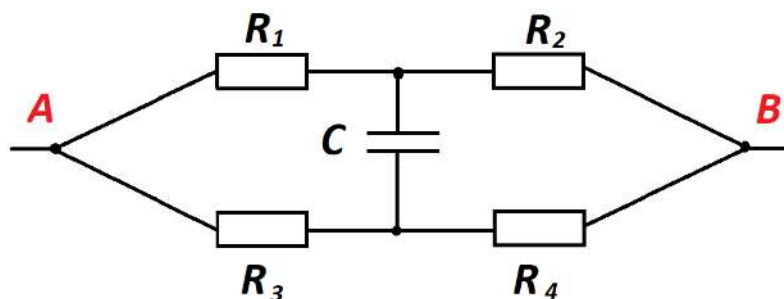
$$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mv}{BqEq}}. \quad (2 \text{ балла})$$

Получаем:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}. \quad (2 \text{ балла})$$

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости $C=200$ мкФ и четырех резисторов сопротивлениями $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=30$ Ом и $R_4=40$ Ом. К точкам А и В схемы присоединили источник постоянного напряжения $U_0=210$ В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 210 \cdot \frac{10}{10 + 20} = 70 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Падение напряжения на резисторе R_3 составляет:

$$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 210 \cdot \frac{30}{30 + 40} = 90 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

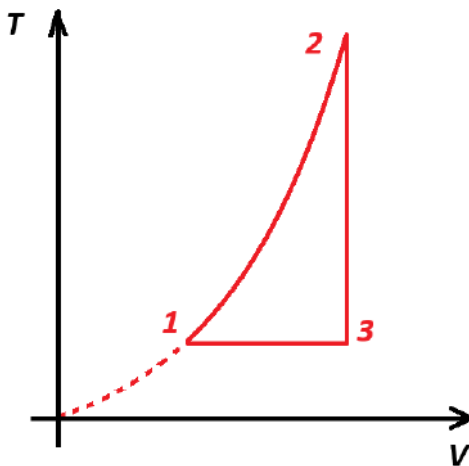
$$U_C = U_3 - U_1 = 90 - 70 = 20 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Заряд конденсатора:

$$q = CU_C = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 4 \text{ мКл.} \quad (4 \text{ балла})$$

Ответ: 4 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объема ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 2 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=2,16A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p - V представляет прямую зависимость.

(2 балла)

Работа в процессе 1-2:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1). \quad (2 \text{ балла})$$

Работа в процессе 2-3:

$$A_{23} = 0. \quad (2 \text{ балла})$$

Работа в процессе 3-1:

$$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu R (T_1 - T_2)}{2,16}. \quad (2 \text{ балла})$$

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1). \quad (2 \text{ балла})$$

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} + A_{31}}{Q_H} = \frac{\frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1) + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu R (T_1 - T_2)}{2,16}}{\frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1)} = \frac{1 - \frac{1}{2,16}}{i + 1} = \frac{1,16}{2,16 \cdot (i + 1)}. \quad (3 \text{ балла})$$

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ $i=3$:

$$\eta = 0,134. \quad (2 \text{ балла})$$

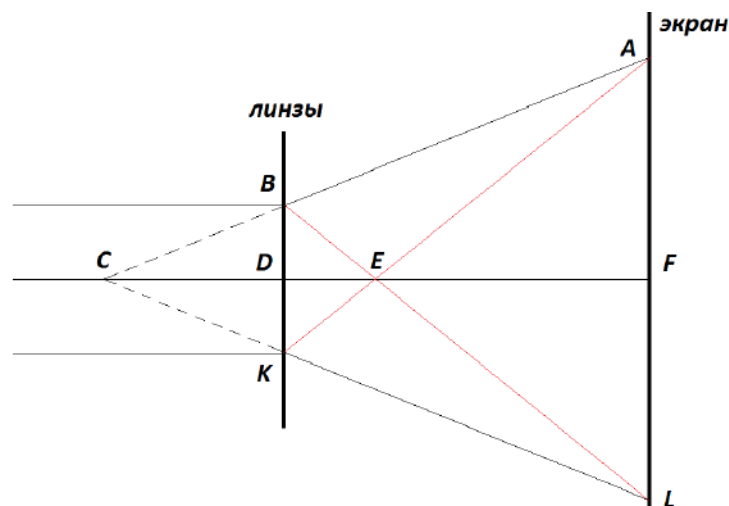
Ответ: 0,134

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой $D_p = -4$ Дптр, нормально падает пучок света диаметром $d_1 = 5$ см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром $d_2 = 20$ см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_c собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию:

(2 балла)



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$$CD = \left| \frac{1}{D_p} \right| = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}. \quad (2 \text{ балла})$$

т.е. получаем, что:

$$DF = CF - CD = 4CD - CD = 3CD = 0,75 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{4}. \quad (2 \text{ балла})$$

Получаем, что:

$$DE = \frac{1}{5} DF = \frac{0,75}{5}. \quad (2 \text{ балла})$$

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$$D_c = \frac{1}{DE} = \frac{5}{0,75} = 6,7 \text{ Дптр.} \quad (3 \text{ балла})$$

Ответ: 6,7 Дптр



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$7\sqrt{2 - \log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5|.$$

Ответ: $[3; 9]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{2 - \log_3 x} + 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|.$$

Пусть $f(t) = 7t + 3|2t - 5|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрытии модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2 - \log_3 x} \leq \log_3 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему

$$\begin{cases} 2 - \log_3 x \geq 0, \\ \log_3 x \geq 0, \\ 2 - \log_3 x \leq \log_3^2 x. \end{cases}$$

Получаем $x \in [3; 9]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 6×14 . У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p = \frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n = 3^{84}$, так как всего в прямоугольнике 84 клетки, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m . Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 42 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{42} , а всего $m = 2^{43}$.

Критерии оценивания. Верно найдено n – 3 балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но

получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m , а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (3a + 1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x . Найдите наименьшее значение выражения $4a + b$.

Ответ: 4.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x , то $(3a + 1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$\begin{aligned} 4a + b &\geq 4a + \frac{(3a + 1)^2}{4a} = \frac{16a^2 + 9a^2 + 6a + 1}{4a} = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{25a^2 + 1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{25a^2}}{2a} = 4, \end{aligned}$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{5}, b = \frac{16}{5}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером $7 \times 8 \times 13$, разбитый плоскостями, параллельными граням, на единичные кубики, проткнули иглой по его большой диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 26.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 6, 7 и 12 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M . Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α . Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 6, 7 и 12 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $6 + 7 + 12 = 25$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $25 + 1 = 26$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 баллов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q , двигаясь вертикально вверх со скоростью v , в момент времени $t=0$ на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B . В тот момент, когда

частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E , и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h . Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица движется в магнитном поле:

$$F_{\text{л}} = ma_{\text{ц}}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$Bqv = m \frac{v^2}{R}. \quad (1 \text{ балл})$$

Получаем:

$$R = \frac{mv}{Bq}. \quad (1 \text{ балл})$$

Время движения в магнитном поле:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}. \quad (1 \text{ балл})$$

Частица движется в электрическом поле:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$R = \frac{at_2^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Время движения в электрическом поле:

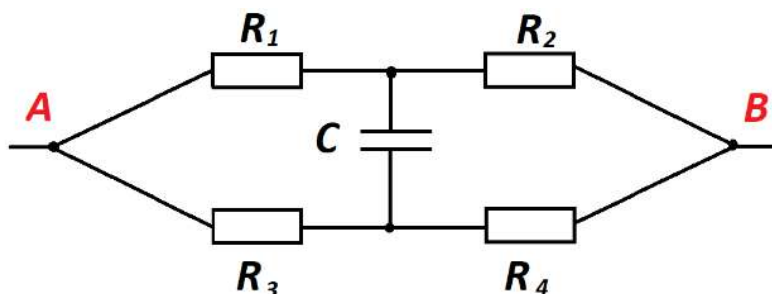
$$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mv}{BqE}}. \quad (2 \text{ балла})$$

Получаем:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}. \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости $C=500$ мкФ и четырех резисторов сопротивлениями $R_1=20$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=40$ Ом и $R_4=30$ Ом. К точкам А и В схемы присоединили источник постоянного напряжения $U_0=420$ В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 420 \cdot \frac{20}{20 + 10} = 280 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Падение напряжения на резисторе R_3 составляет:

$$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 420 \cdot \frac{40}{40 + 30} = 240 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

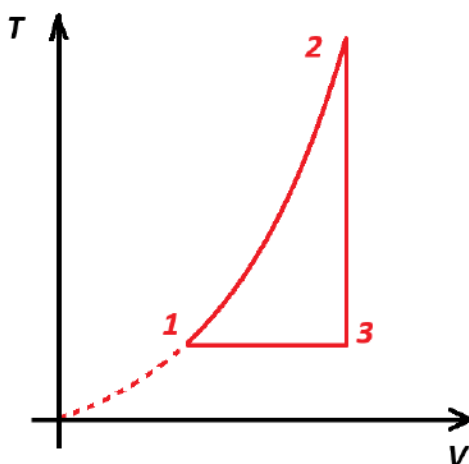
$$U_C = U_1 - U_3 = 280 - 240 = 40 \text{ В.} \quad (2 \text{ балла})$$

Заряд конденсатора:

$$q = CU_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 20 \text{ мКл.} \quad (4 \text{ балла})$$

Ответ: 20 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объема ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 3 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=3,64 \cdot A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p - V представляет прямую зависимость. (2 балла)

Работа в процессе 1-2:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1). \quad (2 \text{ балла})$$

Работа в процессе 2-3:

$$A_{23} = 0. \quad (2 \text{ балла})$$

Работа в процессе 3-1:

$$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu R (T_1 - T_2)}{3,64}. \quad (2 \text{ балла})$$

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1). \quad (2 \text{ балла})$$

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} + A_{31}}{Q_H} = \frac{\frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1) + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu R (T_1 - T_2)}{3,64}}{\frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_1)} = \frac{1 - \frac{1}{3,64}}{i + 1} = \frac{2,64}{3,64 \cdot (i + 1)}. \quad (3 \text{ балла})$$

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ $i=3$:

$$\eta = 0,181. \quad (2 \text{ балла})$$

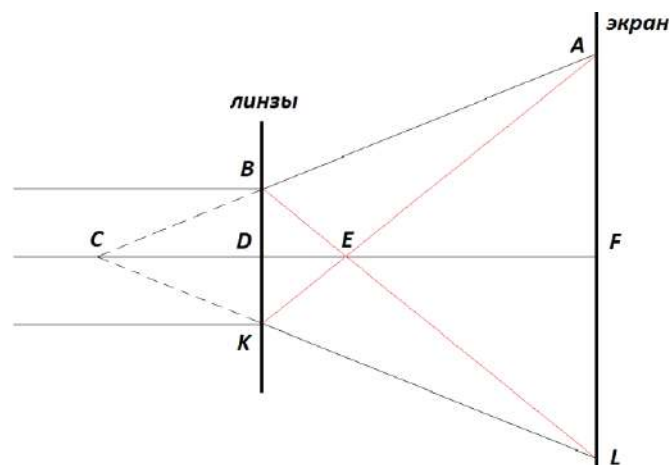
Ответ: 0,181

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой $D_p = -5$ Дптр, нормально падает пучок света диаметром $d_1 = 6$ см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром $d_2 = 12$ см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_c собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию:

(2 балла)



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$$CD = \left| \frac{1}{D_p} \right| = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \quad (2 \text{ балла})$$

т.е. получаем, что:

$$DF = CF - CD = 2CD - CD = CD = 0,2 \text{ м.} \quad (2 \text{ балла})$$

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{2}. \quad (2 \text{ балла})$$

Получаем, что:

$$DE = \frac{1}{3}DF = \frac{0,2}{3}. \quad (2 \text{ балла})$$

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$$D_c = \frac{1}{DE} = \frac{3}{0,2} = 15 \text{ Дптр.} \quad (3 \text{ балла})$$

Ответ: 15 Дптр