



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) В группе детского сада на новогодней ёлке дети получили сладкие подарки. Всего во всех подарках было 45 конфет, но в каждом из подарков не меньше 2-х конфет. Дети решили сохранить подарки и на следующий день каждому подарить половину своих конфет Оле, у которой на следующий день будет день рождения. Но Миша не выдержал и сразу съел все свои конфеты. На следующий день у Оли число конфет увеличилось в 10 раз. Сколько конфет съел Миша?

Ответ: 7.

Решение. Пусть первоначально у Оли было две конфеты (наименьшее возможное число), то на следующий день стало 20 конфет. Значит, 18 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 36 конфет. Тогда у Миши было $45 - 36 - 2 = 7$ конфет. Если у Оли было 3 конфеты, то на следующий день стало 30 конфет. Значит, 27 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 54 конфеты, что больше общего количества конфет из условия. Дальнейшее увеличение числа конфет у Оли приведет к увеличению числа конфет у дарящих.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов. Если ответ угадан (то есть не доказано, что больше 7 конфет быть не может), то ставим 5 баллов.

2. (13 баллов) Миша выписал на доску в строку 2025 букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1013.

Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8} \cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й буквой, 1013. Пример – ааааббббаааабббб ... аааабббба.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Ответ угадан – ставим 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

3. (13 баллов) Из семи различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 составлено семизначное число, удовлетворяющее условию: если сложить любые две соседние цифры этого числа, то получится простое число. Найдите наибольшее число такого вида. (Цифры в числе не должны повторяться).

Ответ: 6521430.

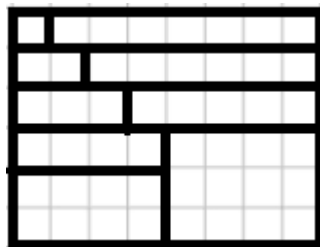
Решение. Наибольшее число желательно начать с 6, для следующей цифры возможны варианты: 5 и 1. Наибольшее число надо попробовать при цифре 5. Для следующей цифры два варианта: 2 и 0. Попробуем большее: 2; получим начало числа: 652. Цифру 4 можно соединить из данных цифр только с цифрами 1 и 3, поэтому она может участвовать только в комбинациях 143 или 341. Пробуя обе, получим или 6521430, или 6523410. Второе не подходит, так как $1+0=1$ – не простое.

Критерии оценивания. Если правильно найдена первая цифра числа, ставим 1 балл. За каждую следующую правильную цифру по 2 балла. Если приведён только правильный ответ без обоснования – 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (13 баллов) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрежала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 9 разных по площади прямоугольников. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрежала.

Ответ: $48 = 6 \times 8$.

Решение. Так как все 9 прямоугольников разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Так как $45=1 \times 45=3 \times 15=5 \times 9$, прямоугольник любых таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8 . То же самое с $46=2 \times 23$ и $47=1 \times 47$. Поэтому меньше $6 \times 8=48$ быть не может. Как Оля его разрежала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – 7 баллов; приведен любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. (10 баллов) Муравьишка со скоростью $v=1$ см/с ползёт по глобусу, радиус которого $R=10$ см, вдоль экватора от точки, расположенной на нулевом меридиане, в точку с координатой 180° восточной долготы. Длину окружности можно посчитать по формуле $L=2\pi R$, где R – ее радиус, $\pi=3,14$. Найдите минимальное время, за которое муравьишка преодолеет эту дистанцию.

Ответ: 31,4 с

Решение: Так как муравьишка ползет по экватору из точки с нулевой долготой (нулевой меридиан) в точку с долготой 180° (180° в. д. и 180° з. д. – одно и то же), то он проползет ровно половину длины окружности:

$$s = \frac{L}{2} = \pi R, \text{ где } L - \text{длина экватора.} \quad (3 \text{ балла})$$

Время путешествия муравьишки:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{v}. \quad (3 \text{ балла})$$

$$t = \frac{3,14 \cdot 10 \text{ см}}{1 \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 31,4 \text{ с.} \quad (4 \text{ балла})$$

6. (10 баллов) Одна сторона зала имеет размеры 216 вершков или 54 пяди, другая сторона - 3,5 сажени. Известно, что одна сажень равна 3 аршинам, один аршин равен 4 пядям или 71 см. Найдите площадь комнаты в метрах квадратных.

Ответ: $\approx 71,46 \text{ м}^2$

Решение:

$$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 71 \frac{\text{см}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 213 \text{ см.} \quad (1)$$

$$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 4 \frac{\text{пядь}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 12 \text{ пядей.} \quad (2)$$

Одна сторона комнаты имеет длину 54 пяди.

Из (2) следует, что эта сторона комнаты:

$$\frac{54 \text{ пяди}}{12 \frac{\text{пядь}}{\text{сажень}}} = 4,5 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 4,5 \text{ сажени} = 958,5 \text{ см} = 9,585 \text{ м.} \quad (3 \text{ балла})$$

Другая сторона имеет длину:

$$3,5 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 3,5 \text{ сажени} = 745,5 \text{ см} = 7,455 \text{ м.} \quad (3 \text{ балла})$$

Площадь прямоугольного зала:

$$9,585 \text{ м} \cdot 7,455 \text{ м} = 71,456175 \text{ м}^2 \approx 71,46 \text{ м}^2. \quad (4 \text{ балла})$$

7. (15 баллов) Ученые отправили сообщение на Плутон. На Плутоне в это же время было 19:30. Продолжительность дня на Плутоне 6,4 земных суток или 24 плутонианских часа (время на Плутоне так же отображается от 00:00:00 до 23:59:59, но уже в местных часах, минутах и секундах). Известно, что скорость сигнала 300000 км/с (в данном случае речь идет о земных секундах), а сигнал на Плутон пришел в тот же плутонианский день в 20:25 по плутонианскому времени. Найдите расстояние

от Земли до Плутона в момент отправки сообщения в астрономических единицах. Астрономическая единица $1 \text{ а.е.} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$, вращением планет пренебречь.

Ответ: 42,24 а.е.

Решение: Так как в сутках на Земле и на Плутоне одинаковое количество местных часов, а, следовательно, одинаковое количество минут, то:

$$1 \text{ плутонианская минута (пл. мин)} = 6,4 \text{ земных минуты (мин)}. \quad (5 \text{ баллов})$$

Сигнал от Земли до Плутона шел:

$$20:25 - 19:30 = 55 \text{ пл. мин} = 55 \text{ пл. мин} \cdot 6,4 \frac{\text{мин}}{\text{пл. мин.}} = 352 \text{ мин} = 21120 \text{ с.} \quad (5 \text{ баллов})$$

Расстояние от Земли до Плутона:

$$s = 21120 \text{ с} \cdot 300000 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 6336000000 \text{ км} = \frac{6336000000 \text{ км}}{1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{км}}{\text{а.е.}}} = 42,24 \text{ а. е.} \quad (5 \text{ баллов})$$

8. (15 баллов) Шестиклассник Петя и пятиклассник Вася решили побегать наперегонки. Так как Петя старше, то он решил дать фору Васе. Т.е. в момент начала состязания Вася был на $x=150 \text{ м}$ впереди Пети. Если непрерывно измерять расстояние между ними, то окажется, что в момент времени t_1 после начала состязания оно будет таким же, как и в момент времени t_2 . Ребята все время бегут по прямой с разными, но постоянными скоростями. Зная, что скорость Васи $v_B=1,5 \text{ м/с}$, определите скорость v_P Пети. Известно, что $t_1+t_2=5 \text{ мин}$.

Ответ: 2,5 м/с

Решение: Пусть Петя обогнал Васю в момент времени t , а расстояние в t_1 и t_2 между Петей и Васей s . Скорость сближения (до обгона) и скорость удаления (после обгона) $u = v_P - v_B$.

$$\begin{cases} (t_2 - t) \cdot u = s \\ (t - t_1) \cdot u = s \end{cases} \quad (5 \text{ баллов})$$

Вычтем из одного уравнения другое и получим, что:

$$(t_1 + t_2 - 2t) \cdot u = 0. \quad (2 \text{ балла})$$

$$t = \frac{t_1+t_2}{2}. \quad x = t \cdot u = t \cdot (v_P - v_B) = \frac{t_1+t_2}{2} \cdot (v_P - v_B) \quad (3 \text{ балла})$$

$$v_P = \frac{2x}{t_1+t_2} + v_B$$

$$v_P = \frac{2 \cdot 150 \text{ м}}{5 \text{ мин}} + 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{2 \cdot 150 \text{ м}}{300 \text{ с}} + 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (5 \text{ баллов})$$



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) В группе детского сада на новогодней елке дети получили сладкие подарки. Всего во всех подарках было 48 конфет, но в каждом из подарков не меньше 2-х. Дети решили сохранить подарки и на следующий день каждому подарить половину своих конфет Оле, у которой на следующий день будет день рождения. Но Миша не выдержал и сразу съел все свои конфеты. На следующий день у Оли число конфет увеличилось в 10 раз. Сколько конфет съел Миша?

Ответ: 10.

Решение. Пусть первоначально у Оли было две конфеты (наименьшее возможное число), то на следующий день стало 20 конфет. Значит, 18 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих было 36 конфет. Тогда у Миши было $48 - 36 - 2 = 10$ конфет. Если у Оли было 3 конфеты, то на следующий день стало 30 конфет. Значит, 27 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 54 конфеты, что больше общего количества конфет из условия. Дальнейшее увеличение числа конфет у Оли приведет к увеличению числа конфет у дарящих.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ответ угадан (то есть не доказано, что больше 10 конфет быть не может), то ставим 5 баллов.

2. (13 баллов) Миша выписал на доску в строку 2026 букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1014.

Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8} \cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й и с 2026-й буквами, 1014. Пример – ааааббббааааббббб ... ааааббббаа.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Ответ угадан – ставим 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

3. (13 баллов) Из семи различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 составлено семизначное число, удовлетворяющее условию: если сложить любые две соседние цифры этого числа, то получится простое число. Найдите наименьшее число такого вида. (Цифры в числе не должны повторяться).

Ответ: 1430256.

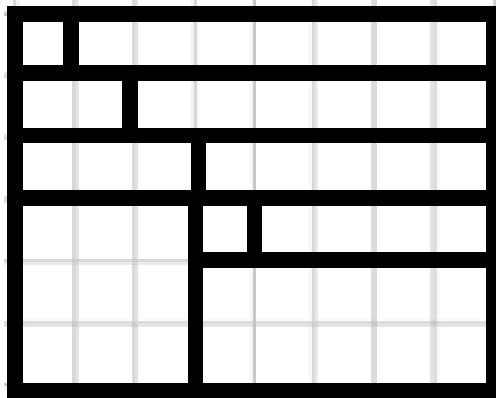
Решение. Цифру 4 можно соединить из данных цифр только с цифрами 1 и 3, поэтому она может участвовать только в комбинациях 143 или 341. Наименьшее число желательно начать с 1. Поэтому начало искомого числа может иметь вид: 143. Далее 2 варианта: 0 или 2. Берем меньшее. Получим 1430. Далее можно 5 или 2. Берем меньшее, 2. Получим 14302. Далее легко: 1430256.

Критерии оценивания. Если правильно найдена первая цифра числа, ставим 1 балл. За каждую следующую правильную цифру по 2 балла. Если приведён только правильный ответ без обоснования – 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (13 баллов) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрежала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 10 прямоугольников, из которых два – одноклеточные квадратики, а все остальные – разные по площади, причём больше единицы. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрежала.

Ответ: $48 = 6 \times 8$.

Решение. Так как все прямоугольники, кроме двух единичных, разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=46$. Так как $46=2 \times 23$ и $47=1 \times 47$, прямоугольники таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8 . Поэтому меньше $6 \times 8 = 48$ быть не может. Как Оля его разрежала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – ставим 7 баллов; приведён любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. (10 баллов) Муравьишка со скоростью $v=2$ см/с ползёт по глобусу, радиус которого $R=24$ см, вдоль экватора от точки, расположенной на нулевом меридиане, в точку с координатой 180° восточной долготы. Длину окружности можно посчитать по формуле $L=2\pi R$, где R – ее радиус, $\pi=3,14$. Найдите минимальное время, за которое муравьишка преодолеет эту дистанцию.

Ответ: 37,68 с

Решение. Так как муравьишка ползет по экватору из точки с нулевой долготой (нулевой меридиан) в точку с долготой 180° (180° в. д. и 180° з. д. – одно и то же), то он проползет ровно половину длины окружности:

$$s = \frac{L}{2} = \pi R, \text{ где } L - \text{длина экватора.} \quad (3 \text{ балла})$$

Время путешествия муравьишки:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{v}. \quad (3 \text{ балла})$$

$$t = \frac{3,14 \cdot 24 \text{ см}}{2 \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 37,68 \text{ с.} \quad (4 \text{ балла})$$

6. (10 баллов) Одна сторона зала имеет размеры 108 вершков или 27 пяди, другая сторона - 7 сажень. Известно, что одна сажень равна 3 аршинам, один аршин равен 4 пядям или 71 см. Найдите площадь комнаты в метрах квадратных.

Ответ: $\approx 71,46 \text{ м}^2$

Решение:

$$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 71 \frac{\text{см}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 213 \text{ см. (1)}$$

$$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 4 \frac{\text{пядь}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 12 \text{ пядей. (2)}$$

Одна сторона комнаты имеет длину 27 пяди.

Из (2) следует, что эта сторона комнаты:

$$\frac{27 \text{ пяди}}{12 \frac{\text{пядь}}{\text{сажень}}} = 2,25 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 2,25 \text{ сажени} = 479,25 \text{ см} = 4,7925 \text{ м.} \quad (3 \text{ балла})$$

Другая сторона имеет длину:

$$7 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 7 \text{ сажени} = 1491 \text{ см} = 14,91 \text{ м.} \quad (3 \text{ балла})$$

Площадь прямоугольного зала:

$$4,7925 \text{ м} \cdot 14,91 \text{ м} = 71,456175 \text{ м}^2 \approx 71,46 \text{ м}^2. \quad (4 \text{ балла})$$

7. (15 баллов) Ученые отправили сообщение на Плутон. На Плутоне в это же время было 14:15. Продолжительность дня на Плутоне 6,4 земных суток или 24 плутонианских часа (время на Плутоне так же отображается от 00:00:00 до 23:59:59, но уже в местных часах, минутах и секундах). Известно, что скорость сигнала 300000 км/с (в данном случае речь идет о земных секундах), а сигнал на Плутон пришел в тот же плутонианский день в 15:10 по плутонианскому времени. Найдите расстояние от Земли до Плутона в момент отправки сообщения в астрономических единицах. Астрономическая единица 1 а.е.= $1,5 \cdot 10^8$ км, вращением планет пренебречь.

Ответ: 42,24 а.е.

Решение: Так как в сутках на Земле и на Плутоне одинаковое количество местных часов, а, следовательно, одинаковое количество минут, то:

$$1 \text{ плутонианская минута (пл. мин)} = 6,4 \text{ земных минуты (мин)}. \quad (5 \text{ баллов})$$

Сигнал от Земли до Плутона шел:

$$15:10 - 14:15 = 55 \text{ пл. мин} = 55 \text{ пл. мин} \cdot 6,4 \frac{\text{мин}}{\text{пл. мин.}} = 352 \text{ мин} = 21120 \text{ с.} \quad (5 \text{ баллов})$$

Расстояние от Земли до Плутона:

$$s = 21120 \text{ с} \cdot 300000 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 6336000000 \text{ км} = \frac{6336000000 \text{ км}}{1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{км}}{\text{а.е.}}} = 42,24 \text{ а. е.} \quad (5 \text{ баллов})$$

8. (15 баллов) Шестиклассник Петя и пятиклассник Вася решили побегать наперегонки. Так как Петя старше, то он решил дать фору Васе. Т.е. в момент начала состязания Вася был на $x=180$ м впереди Пети. Если непрерывно измерять расстояние между ними, то окажется, что в момент времени t_1 после начала состязания оно будет таким же, как и в момент времени t_2 . Ребята все время бегут по прямой с разными, но постоянными скоростями. Зная, что скорость Васи $V_B = 2$ м/с, определите скорость V_P Пети. Известно, что $t_1 + t_2 = 6$ мин.

Ответ: 3 м/с

Решение: Пусть Петя обогнал Васю в момент времени t , а расстояние в t_1 и t_2 между Петей и Васей s . Скорость сближения (до обгона) и скорость удаления (после обгона) $u = v_P - v_B$.

$$\begin{cases} (t_2 - t) \cdot u = s \\ (t - t_1) \cdot u = s \end{cases} \quad (5 \text{ баллов})$$

Вычтем из одного уравнения другое и получим, что:

$$(t_1 + t_2 - 2t) \cdot u = 0. \quad (2 \text{ балла})$$

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad x = t \cdot u = t \cdot (v_P - v_B) = \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot (v_P - v_B) \quad (3 \text{ балла})$$

$$v_P = \frac{2x}{t_1 + t_2} + v_B$$

$$v_P = \frac{2 \cdot 180 \text{ м}}{6 \text{ мин}} + 2 \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{2 \cdot 180 \text{ м}}{360 \text{ с}} + 2 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (5 \text{ баллов})$$