



1. (11 баллов) Три бегуна стартуют в одном направлении на одну дистанцию с интервалом в 1 секунду. Скорость, стартовавшего первым, 7 м/сек, вторым – 8 м/сек, третьим – 9 м/сек. Третий бегун финишировал первым, и в момент его финиша сумма расстояний от него до двух остальных бегунов не превышала двух метров. Найдите длину дистанции.

Ответ: 72 м.

Решение. Обозначим S м – длина дистанции. Эту дистанцию третий бегун преодолел за $\frac{S}{9}$ сек. За это время первый бегун пробежал $7\left(\frac{S}{9} + 2\right)$ м, и до финиша ему осталось $S - 7\left(\frac{S}{9} + 2\right) = \frac{2}{9}S - 14$ м. Заметим, что $\frac{2S}{9} - 14 \geq 0$, то есть $S \geq 63$. В момент финиша третьего бегуна второй бегун пробежал $8\left(\frac{S}{9} + 1\right)$ м, и до финиша ему осталось $S - 8\left(\frac{S}{9} + 1\right) = \frac{S}{9} - 8$ м. И $S \geq 72$. Сумма расстояний двух первых бегунов до финиша (в момент, когда третий финишировал) равна $\frac{2}{9}S - 14 + \frac{S}{9} - 8 = \frac{S}{3} - 22$. По условию задачи получаем $\frac{S}{3} - 22 \leq 2$, или $S \leq 72$. Так как ранее получено неравенство $S \geq 72$, то $S = 72$.

Критерии оценивания. Получено верное итоговое неравенство, но нет ограничений на величину дистанции – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 8×12 . У него 3 краски: белая, серая, черная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не могут быть соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Пети раскрасить доску?

Ответ: 2^{49} .

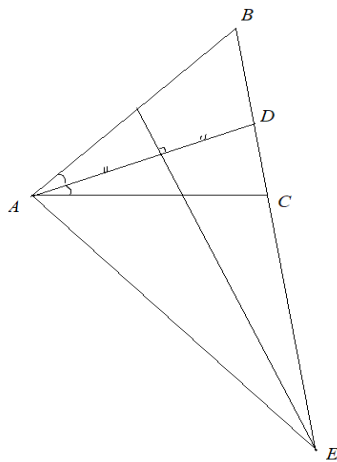
Решение. Перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 48 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{48} , а всего 2^{49} .

Критерии оценивания. Белые и черные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 8 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB=8$, $BC=7$, $AC=6$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD , который пересекает прямую BC в точке E . Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $AE=x$, $CE=y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2} \angle A; \quad \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2} \angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ подобны. Тогда из подобия следует:

$$\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}. \quad \text{Решая систему двух уравнений, находим: } y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Известно, что для некоторого натурального a числа $2a+15$ и $3a+5$ делятся на число pq , где p и q – простые. Найдите все такие p и q .

Ответ: 5 и 7.

Решение. Из условия следует, что $3(2a+15) - 2(3a+5) = 35$ делится на pq . Поэтому никакие простые, кроме чисел 5 и 7, не подходят, а 5 и 7 подходят, например, при $a=10$.

Критерии оценивания. Ответ угадан 2 балла. Найдено число 35, но не приведён пример для a – тогда 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

5. (10 баллов) В распоряжении лаборанта Максима имеются два сосуда с жидкостями, плотности которых $\rho_1=800 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2=1000 \text{ кг/м}^3$. Максим обратил внимание, что если один и тот же шарик поочередно полностью опускать в данные жидкости, то для удержания шарика в равновесии, необходимо прикладывать одну и ту же силу. Определите плотность материала шарика.

Ответ: 900 кг/м^3

Решение:

В жидкости 1 шарик утонет, а в жидкости 2 всплывет ($\rho_2 > \rho_1$). (2 балла)

Тогда условие равновесия шарика в обоих случаях следующее:

$$F_1 + F_{a1} = mg \quad (2 \text{ балла})$$

$$F_{a2} = F_2 + mg \quad (2 \text{ балла})$$

Сложим уравнения:

$$F_1 + F_{a1} + F_{a2} = 2mg + F_2$$

Так как $F_1 = F_2$ по условию, то:

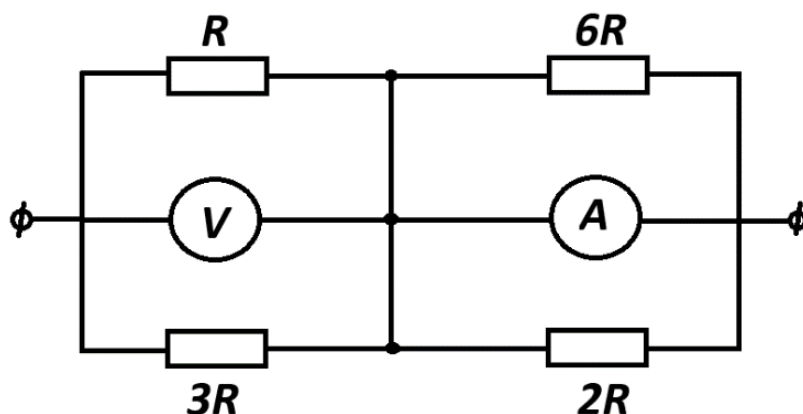
$$F_{a1} + F_{a2} = 2mg.$$

$$\rho_1 gV + \rho_2 gV = 2\rho gV,$$

где ρ – плотность шарика.

$$\text{Отсюда } \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2} = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4 \text{ балла})$$

6. (10 баллов) Цепь, состоящую из вольтметра, амперметра и четырех резисторов с сопротивлениями R , $2R$, $3R$ и $6R$ подключили к источнику постоянного напряжения. Известно, что $R = 2 \text{ Ом}$, а вольтметр показал $4,5 \text{ В}$. Что покажет амперметр? Какой ток потечет через резистор R ? Амперметр убрали из цепи. Что после этого покажет вольтметр? Приборы идеальные.



Ответ: 3 А ; $2,25 \text{ А}$; $1,5 \text{ В}$

Решение: Так как резисторы $6R$, $2R$ и идеальный амперметр соединены параллельно, то ток потечет только по амперметру, а напряжение на этом участке будет равняться нулю. (1 балл)

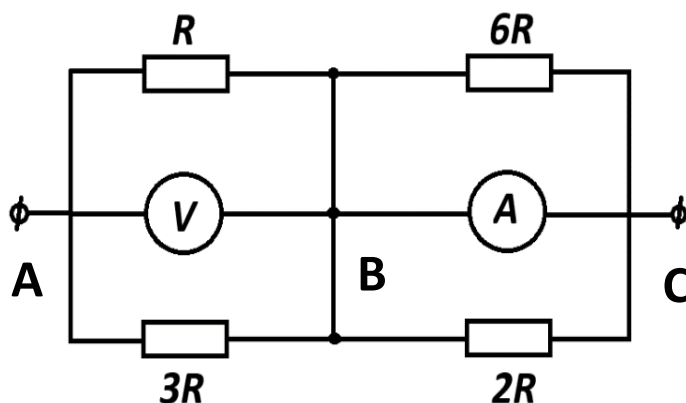
Следовательно, напряжение, которое показал вольтметр, равняется напряжению на всей цепи и напряжению источника ($u_V = u_0 = 4,5 \text{ В}$), а ток, который показал амперметр, равен общему току в цепи $I_A = I_0$. (1 балл)

Так как по резисторам $6R$ и $2R$, а также по идеальному вольтметру ток не потечет, то их можно убрать из цепи. Общее сопротивление цепи R_0 .

Из параллельного соединения следует $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}$. $I_A = I_0 = u_0 \frac{1}{R_0} = u_0 \frac{4}{3R}$.

$$I_A = \frac{4,5 \text{ В} \cdot 4}{3 \cdot 2 \text{ Ом}} = 3 \text{ А.} \quad (2 \text{ балла})$$

Ток, текущий через резистор R , можно найти через закон Ома: $I = \frac{u_V}{R} = \frac{4,5 \text{ В}}{2 \text{ Ом}} = 2,25 \text{ А}$. (2 балла)



Если амперметр убрать из цепи, то сопротивление между узлами А и В (следует из параллельного соединения резисторов) $R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{3}{4}R$, а между узлами В и С $R_{BC} =$

$$\frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{6R}} = \frac{3}{2}R.$$

$$\text{Так как } I_{AB} = I_{BC}, \text{ то: } \frac{u_{AB}}{u_{BC}} = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{\frac{3}{4}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{2}.$$

(2 балла)

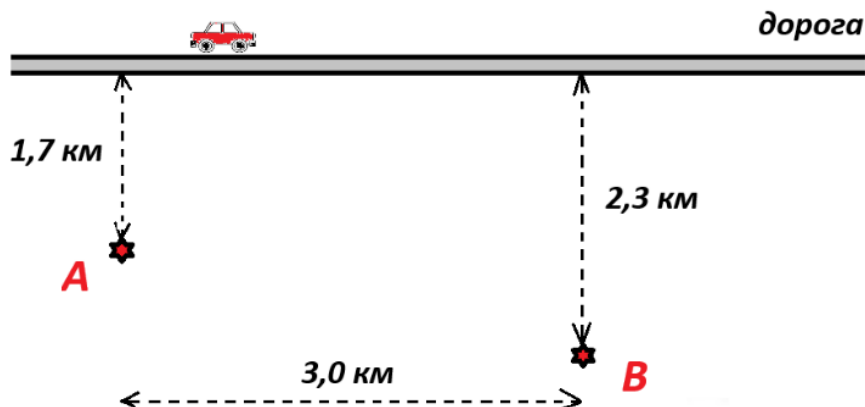
Напряжений на всей цепи: $u_0 = u_{AB} + u_{BC}$.

Напряжение между точками А и В равно напряжению на вольтметре.

$$\text{Отсюда следует, что } u_V = u_{AB} = \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \text{ В} = 1,5 \text{ В}.$$

(2 балла)

7. (15 баллов) Перед курьером Борисом поставлена следующая задача. Необходимо из пункта А пешком добраться до автомобиля, находящегося на дороге, взять груз и доставить его в пункт В как можно быстрее. Автомобиль может встретить и передать ему груз в любой точке дороги. В автомобиле свободных мест нет, поэтому подвезти Бориса он не сможет, Борис должен передвигаться только пешком, причем его скорость 2,5 км/ч. Кратчайшее расстояние от пункта А до дороги равно 1,7 км, кратчайшее расстояние от пункта В до дороги – 2,3 км, расстояние между пунктами, отсчитываемое вдоль дороги – 3,0 км (см. рисунок). За какое минимальное время Борис справится с поставленной задачей?

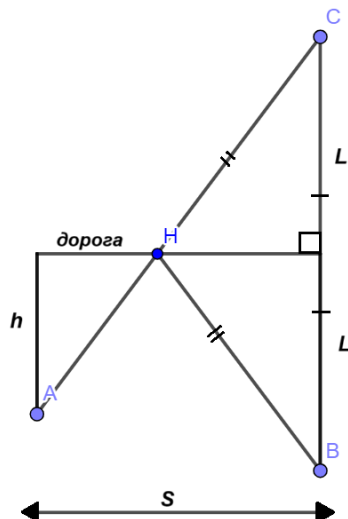


Ответ: 2 ч

Решение:

Отразим пункт В симметрично относительно дороги (точка С на рисунке).

(4 балла)



Выберем на дороге произвольную точку Н, где Борис заберет груз. От А до Н и от Н до В и С Борис должен идти по прямой, так как время должно быть минимальным. Время до пункта В $t_{AB} = \frac{AH+HB}{v}$, а до пункта С - $t_{AC} = \frac{AH+HC}{v}$. Из симметрии следует, что $HC = HB$ (см. рис.), тогда $t_{AB} = t_{AC}$. Решим задачу, когда Борису нужно добраться в пункт С.

Борис доберется из А в С за минимальное время только в том случае, если он идет по прямой АС. (4 балла)

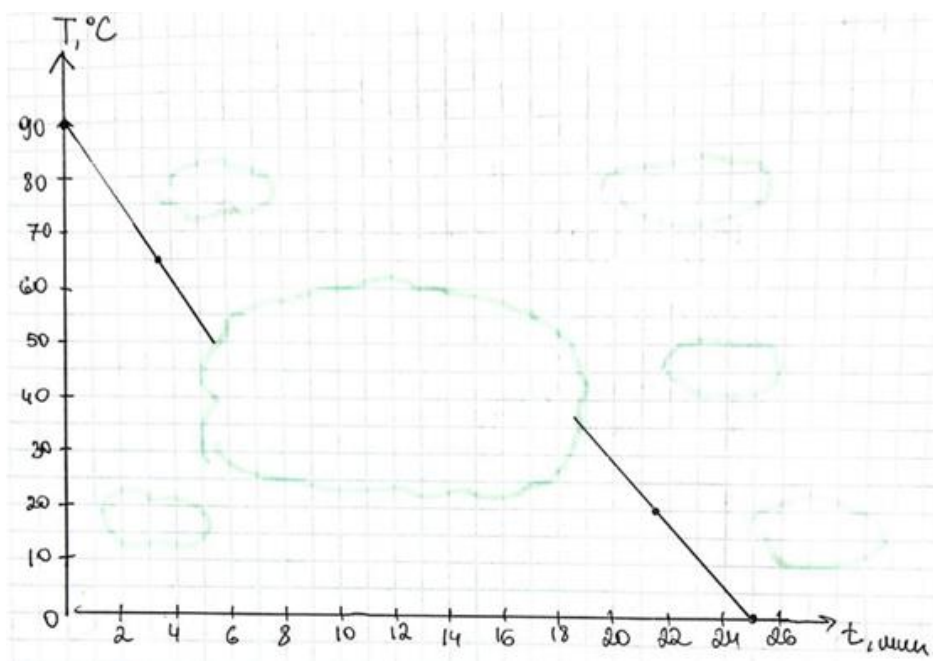
Вдоль дороги придется идти $S = 3$ км, перпендикулярно ей $(h + L) = (1,7 \text{ км} + 2,3 \text{ км}) = 4$ км.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{S^2 + (h + L)^2} = \sqrt{(3 \text{ км})^2 + (4 \text{ км})^2} = 5$ км. (4 балла)

$t_{\min} = \frac{AC}{v} = \frac{5 \text{ км}}{2,5 \text{ км/ч}} = 2$ ч. (3 балла)

8. (15 баллов) В архиве уездного города N обнаружили запачканный лист с графиком зависимости температуры от времени. На обороте было указано, что некий ученый Кирилл взял один литр воды и начал отводить от него тепло с постоянной скоростью. Как только вся вода превратилась в лед, ученый начал отводить от него тепло с другой постоянной скоростью. Обнаружившие график заметили, что ось времени «съехала» вдоль оси температур. Найдите мощности, с которыми ученый отводил тепло, время, когда вся вода замерзла, а также сдвиг оси времени (в градусах Цельсия).

Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоёмкость воды и льда $4200 \text{ Дж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$ и $2100 \text{ Дж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$ соответственно.



Ответ: 500 Вт; 200 Вт; 40°C

Решение:

Объем воды один литр, следовательно, ее масса $m = \rho V = 1000 \cdot 0,001 = 1$ кг.

(1 балл)

Так как во время остывания воды потерь в среду не было, то для участков графика для остывания справедливо выражение:

$$P \Delta t = c m \Delta T.$$

(2 балла)

$P_1 = \frac{c_1 m \Delta T}{\Delta t} = c_1 m k_1$ – мощность на первом участке графика (процесс остывания воды), где c_1 – удельная теплоемкость воды, а k_1 – коэффициент угла наклона данного участка графика.

Аналогично $P_2 = c_2 m k_2$, где c_2 – удельная теплоемкость льда.

Определим параметры видимых линейных участков, подставляя по две точки с известными данными (t , T).

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 \text{ мин} + b_1 = 90^\circ\text{C} \\ k_1 \cdot 3,5 \text{ мин} + b_1 = 65^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 90^\circ\text{C} \\ k_1 = -\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} = -\frac{5^\circ\text{C}}{42 \text{ с}} \end{cases} \quad (1 \text{ балл})$$

$$P_1 = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 1 \text{ кг} \cdot \left(-\frac{5^\circ\text{C}}{42 \text{ с}}\right) = -500 \text{ Вт}.$$

Минус получился из-за того, что вода остывает, поэтому коэффициент угла наклона графика меньше нуля. Мощность отвода тепла берется по модулю, то есть ответ 500 Вт. (2 балла)

$$\begin{cases} k_2 \cdot 21,5 \text{ мин} + b_2 = 20^\circ\text{C} \\ k_2 \cdot 25 \text{ мин} + b_2 = 0^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = \frac{1000}{7}^\circ\text{C} \\ k_2 = -\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} = -\frac{2^\circ\text{C}}{21 \text{ с}} \end{cases} \quad (1 \text{ балл})$$

$$P_2 = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 1 \text{ кг} \cdot \left(-\frac{2^\circ\text{C}}{21 \text{ с}}\right) = -200 \text{ Вт}$$

Опять же, -200 Вт – это мощность нагрева, а мощность отвода тепла (охлаждения) 200 Вт. (2 балла)

Время, за которое вода полностью превратится в лед:

$$\Delta t = \frac{\lambda m}{P_1} = \frac{330000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 1 \text{ кг}}{500 \text{ Вт}} = 660 \text{ с} = 11 \text{ мин}. \quad (2 \text{ балла})$$

Так как график нашли со сдвинутой осью, то пусть замерзание воды происходит при температуре T , вода начинает замерзать в момент t , а заканчивает в момент $t + \Delta t$.

Справедливы следующие уравнения, так как точки начала и конца замерзания воды принадлежат соответственно первому и второму участку графика:

$$\begin{cases} k_1 t + b_1 = T \\ k_2(t + \Delta t) + b_2 = T \end{cases} \quad t = \frac{b_2 - b_1 + k_2 \Delta t}{k_1 - k_2} = \frac{\frac{1000}{7}^\circ\text{C} - 90^\circ\text{C} + \left(-\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}}\right) \cdot 11 \text{ мин}}{-\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} - \left(-\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}}\right)} = 7 \text{ мин} \quad (2 \text{ балла})$$

$$T = k_1 t + b_1 = -\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} \cdot 7 \text{ мин} + 90^\circ\text{C} = 40^\circ\text{C}$$

Так как получилось, что вода замерзает при 40°C , то сдвиг оси времени произошел на 40°C в положительном направлении оси температур. (2 балла)



1. (11 баллов) Три бегуна стартуют в одном направлении на одну дистанцию с интервалом в 1 секунду. Скорость, стартовавшего первым, 6 м/сек, вторым – 7 м/сек, третьим – 8 м/сек. Третий бегун финишировал первым, и в момент его финиша сумма расстояний от него до двух остальных бегунов не превышала двух метров. Найдите длину дистанции.

Ответ: 56 м.

Решение. Обозначим S м – длина дистанции. Эту дистанцию третий бегун преодолел за $\frac{S}{8}$ сек. За это время первый бегун пробежал $6\left(\frac{S}{8} + 2\right)$ м, и до финиша ему осталось $S - 6\left(\frac{S}{8} + 2\right) = \frac{S}{4} - 12$ м. Заметим, что $\frac{S}{4} - 12 \geq 0$, то есть $S \geq 48$. В момент финиша третьего бегуна второй бегун пробежал $7\left(\frac{S}{8} + 1\right)$ м, и до финиша ему осталось $S - 7\left(\frac{S}{8} + 1\right) = \frac{S}{8} - 7$ м. И $S \geq 56$. Сумма расстояний двух первых бегунов до финиша (в момент, когда третий финишировал) равна $\frac{S}{4} - 12 + \frac{S}{8} - 7 = \frac{3S}{8} - 19$. По условию задачи получаем $\frac{3S}{8} - 19 \leq 2$, или $S \leq 56$. Так как ранее получено неравенство $S \geq 56$, то $S = 56$.

Критерии оценивания. Получено верное итоговое неравенство, но нет ограничений на величину дистанции – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 6×14 . У него 3 краски: белая, серая, черная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не могут быть соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Пети раскрасить доску?

Ответ: 2^{43} .

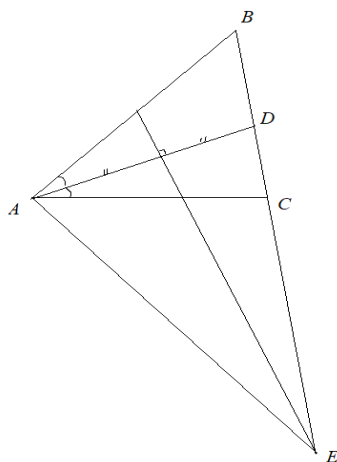
Решение. Перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 42 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{42} , а всего 2^{43} .

Критерии оценивания. Белые и черные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 8 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB=6$, $BC=5$, $AC=4$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD , который пересекает прямую BC в точке E . Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $AE=x$, $CE=y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2}\angle A; \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2}\angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ подобны. Тогда из подобия следует: $\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}$. Решая систему двух уравнений, находим: $y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}$. Отсюда

$$\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Известно, что для некоторого натурального a числа $4a+5$ и $3a-10$ делятся на число pq , где p и q – простые. Найдите все такие p и q .

Ответ: 5 и 11.

Решение. Из условия следует, что $3(4a+5) - 4(3a-10) = 55$ делится на pq . Поэтому никакие простые, кроме чисел 5 и 11, не подходят, а 5 и 11 подходят, например, при $a=40$.

Критерии оценивания. Ответ угадан 2 балла. Найдено число 55, но не приведён пример для a – тогда 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

5. (10 баллов) В распоряжении лаборанта Максима имеются два сосуда с жидкостями, плотности которых $\rho_1=600 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2=800 \text{ кг/м}^3$. Максим обратил внимание, что если один и тот же шарик поочередно полностью опускать в данные жидкости, то для удержания шарика в равновесии, необходимо прикладывать одну и ту же силу. Определите плотность материала шарика.

Ответ: 700 кг/м^3

Решение: В жидкости 1 шарик утонет, а в жидкости 2 всплывет ($\rho_2 > \rho_1$). (2 балла)

Тогда условие равновесия шарика в обоих случаях следующее:

$$F_1 + F_{a1} = mg \quad (2 \text{ балла})$$

$$F_{a2} = F_2 + mg \quad (2 \text{ балла})$$

Сложим уравнения:

$$F_1 + F_{a1} + F_{a2} = 2mg + F_2$$

Так как $F_1 = F_2$ по условию, то:

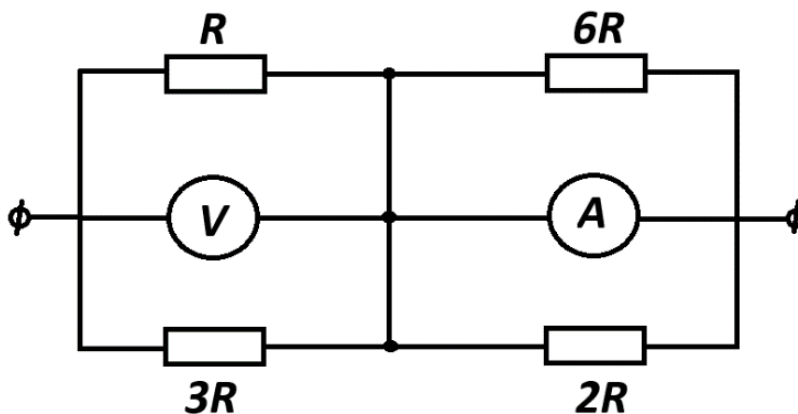
$$F_{a1} + F_{a2} = 2mg.$$

$$\rho_1 g V + \rho_2 g V = 2\rho V g,$$

где ρ – плотность шарика.

$$\text{Отсюда } \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2} = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4 \text{ балла})$$

6. (10 баллов) Цепь, состоящую из вольтметра, амперметра и четырех резисторов с сопротивлениями R , $2R$, $3R$ и $6R$ подключили к источнику постоянного напряжения. Известно, что $R = 4 \text{ Ом}$, а вольтметр показал 4 В . Что покажет амперметр? Какой ток потечет через резистор R ? Амперметр убрали из цепи. Что после этого покажет вольтметр? Приборы идеальные.



Ответ: $4/3 \text{ А}$; 1 А ; $4/3 \text{ В}$

Решение: Так как резисторы $6R$, $2R$ и идеальный амперметр соединены параллельно, то ток потечет только по амперметру, а напряжение на этом участке будет равняться нулю. (1 балл)

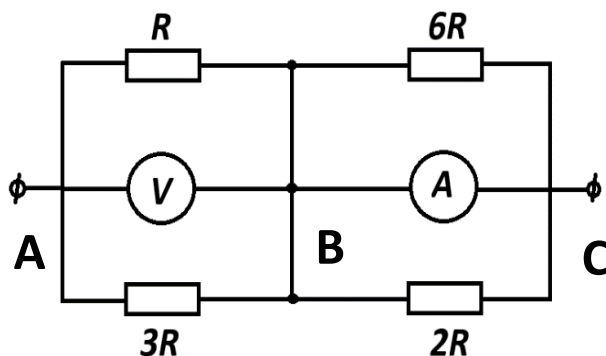
Следовательно, напряжение, которое показал вольтметр, равняется напряжению на всей цепи и напряжению источника ($u_V = u_0 = 4 \text{ В}$), а ток, который показал амперметр, равен общему току в цепи $I_A = I_0$. (1 балл)

Так как по резисторам $6R$ и $2R$, а также по идеальному вольтметру ток не потечет, то их можно убрать из цепи. Общее сопротивление цепи R_0 .

Из параллельного соединения следует $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}$. $I_A = I_0 = u_0 \frac{1}{R_0} = u_0 \frac{4}{3R}$.

$$I_A = \frac{4 \text{ В} \cdot 4}{3 \cdot 4 \text{ Ом}} = \frac{4}{3} \text{ А.} \quad (2 \text{ балла})$$

Ток, текущий через резистор R , можно найти через закон Ома: $I = \frac{u_V}{R} = \frac{4 \text{ В}}{4 \text{ Ом}} = 1 \text{ А.}$ (2 балла)



Если амперметр убрать из цепи, то сопротивление между узлами А и В (следует из параллельного соединения резисторов) $R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{3}{4}R$, а между узлами В и С

$$R_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{6R}} = \frac{3}{2}R.$$

так как $I_{AB} = I_{BC}$, то: $\frac{u_{AB}}{u_{BC}} = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{\frac{3}{4}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{2}$. (2 балла)

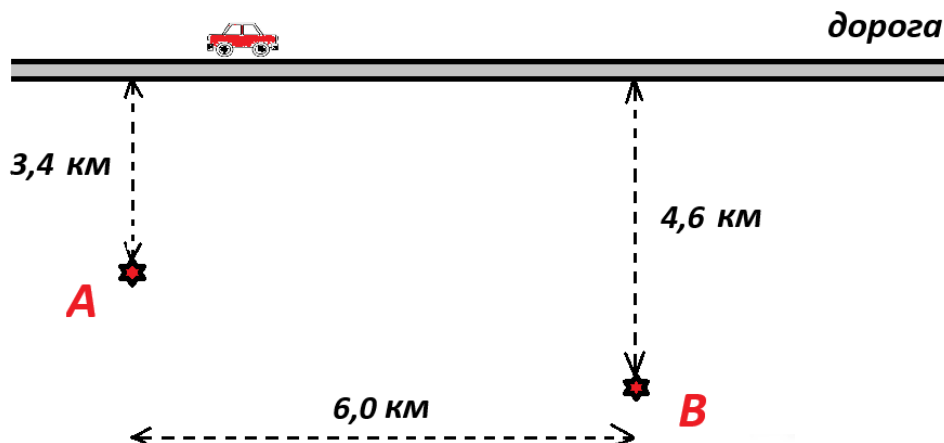
Напряжений на всей цепи: $u_0 = u_{AB} + u_{BC}$.

Напряжение между точками А и В равно напряжению на вольтметре.

Отсюда следует, что $u_V = u_{AB} = \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ В} = \frac{4}{3} \text{ В.}$ (2 балла)

7. (15 баллов) Перед курьером Борисом поставлена следующая задача. Необходимо из пункта А пешком добраться до автомобиля, находящегося на дороге, взять груз и доставить его в пункт В как можно быстрее. Автомобиль может встретить и передать ему груз в любой точке дороги. В автомобиле свободных мест нет, поэтому подвезти Бориса он не сможет, Борис должен передвигаться только пешком, причем его скорость 2 км/ч . Кратчайшее расстояние от пункта А до дороги равно $3,4 \text{ км}$, кратчайшее расстояние от

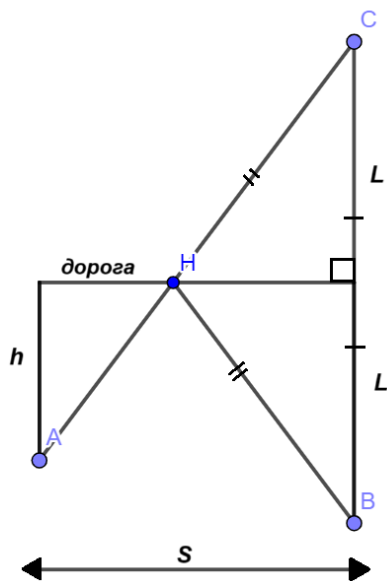
пункта В до дороги – 4,6 км, расстояние между пунктами, отсчитываемое вдоль дороги – 6,0 км (см. рисунок). За какое минимальное время Борис справится с поставленной задачей?



Ответ: 5 ч

Решение:

Отразим пункт В симметрично относительно дороги (точка С на рисунке). (4 балла)



Выберем на дороге произвольную точку Н, где Борис заберет груз. От А до Н и от Н до В и С Борис должен идти по прямой, так как время должно быть минимальным. Время до пункта В $t_{AB} = \frac{AH+HB}{v}$, а до пункта С - $t_{AC} = \frac{AH+HC}{v}$. Из симметрии следует, что $HC = HB$ (см. рис.), тогда $t_{AB} = t_{AC}$. Решим задачу, когда Борису нужно добраться в пункт С.

Борис доберется из А в С за минимальное время только в том случае, если он идет по прямой АС. (4 балла)

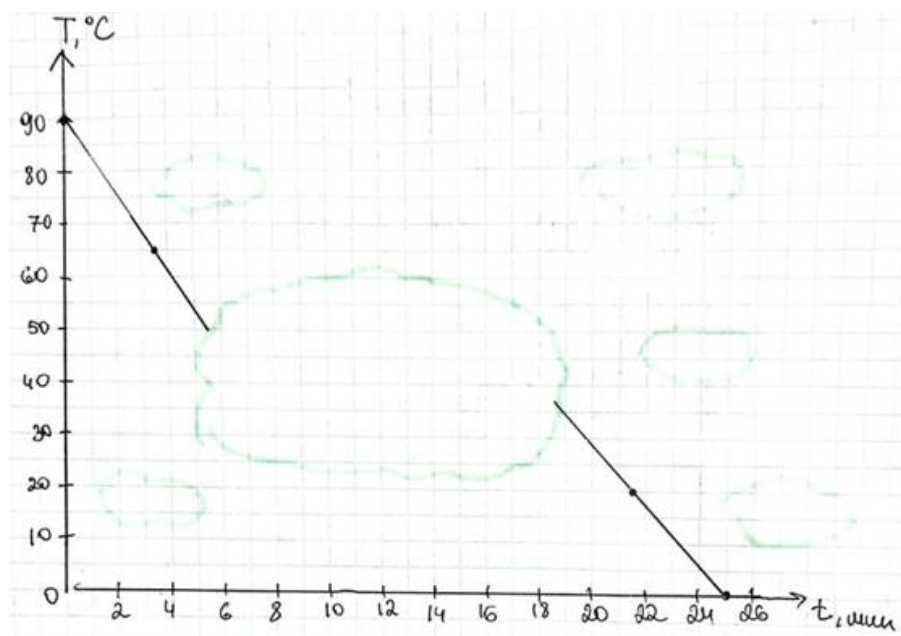
Вдоль дороги придется идти $S = 6$ км, перпендикулярно ей $(h + L) = (3,4 \text{ км} + 4,6 \text{ км}) = 8 \text{ км}$.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{S^2 + (h + L)^2} = \sqrt{(6 \text{ км})^2 + (8 \text{ км})^2} = 10 \text{ км}$. (4 балла)

$$t_{\min} = \frac{AC}{v} = \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}} = 5 \text{ ч.} \quad (3 \text{ балла})$$

8. (15 баллов) В архиве уездного города N обнаружили запечатанный лист с графиком зависимости температуры от времени. На обороте было указано, что некий ученый Кирилл взял один литр воды и начал отводить от него тепло с постоянной скоростью. Как только вся вода превратилась в лед, ученый начал отводить от него тепло с другой постоянной скоростью. Обнаружившие график заметили, что ось времени «съехала» вдоль оси температур. Найдите мощности, с которыми ученый отводил тепло, время, когда вся вода замерзла, а также сдвиг оси времени (в градусах Цельсия).

Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоёмкость воды и льда $4200 \text{ Дж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$ и $2100 \text{ Дж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$ соответственно.



Ответ: 500 Вт; 200 Вт; 400С

Решение:

Объем воды один литр, следовательно, ее масса $m = \rho V = 1000 \cdot 0,001 = 1 \text{ кг}$. (1 балл)

Так как во время остывания воды потерь в среду не было, то для участков графика для остывания справедливо выражение:

$$P \Delta t = c m \Delta T. \quad (2 \text{ балла})$$

$P_1 = \frac{c_1 m \Delta T}{\Delta t} = c_1 m k_1$ – мощность на первом участке графика (процесс остывания воды), где c_1 – удельная теплоемкость воды, а k_1 - коэффициент угла наклона данного участка графика.

Аналогично $P_2 = c_2 m k_2$, где c_2 – удельная теплоемкость льда.

Определим параметры видимых линейных участков, подставляя по две точки с известными данными (t , T).

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 \text{ мин} + b_1 = 90^\circ\text{C} \\ k_1 \cdot 3,5 \text{ мин} + b_1 = 65^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 90^\circ\text{C} \\ k_1 = -\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} = -\frac{5^\circ\text{C}}{42 \text{ с}} \end{cases} \quad (1 \text{ балл})$$

$$P_1 = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 1 \text{ кг} \cdot \left(-\frac{5^\circ\text{C}}{42 \text{ с}}\right) = -500 \text{ Вт}.$$

Минус получился из-за того, что вода остывает, поэтому коэффициент угла наклона графика меньше нуля. Мощность отвода тепла берется по модулю, то есть ответ 500 Вт. (2 балла)

$$\begin{cases} k_2 \cdot 21,5 \text{ мин} + b_2 = 20^\circ\text{C} \\ k_2 \cdot 25 \text{ мин} + b_2 = 0^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = \frac{1000}{7}^\circ\text{C} \\ k_2 = -\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} = -\frac{2^\circ\text{C}}{21 \text{ с}} \end{cases} \quad (1 \text{ балл})$$

$$P_2 = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 1 \text{ кг} \cdot \left(-\frac{2^\circ\text{C}}{21 \text{ с}}\right) = -200 \text{ Вт}$$

Опять же, -200 Вт – это мощность нагрева, а мощность отвода тепла (охлаждения) 200 Вт. (2 балла)

Время, за которое вода полностью превратится в лед:

$$\Delta t = \frac{\lambda m}{P_1} = \frac{330000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 1 \text{ кг}}{500 \text{ Вт}} = 660 \text{ с} = 11 \text{ мин}. \quad (2 \text{ балла})$$

Так как график нашли со сдвинутой осью, то пусть замерзание воды происходит при температуре T , вода начинает замерзать в момент t , а заканчивает в момент $t + \Delta t$.

Справедливы следующие уравнения, так как точки начала и конца замерзания воды принадлежат соответственно первому и второму участку графика:

$$\begin{cases} k_1 t + b_1 = T \\ k_2(t + \Delta t) + b_2 = T \end{cases}$$

$$t = \frac{b_2 - b_1 + k_2 \Delta t}{k_1 - k_2} = \frac{\frac{1000}{7}^\circ\text{C} - 90^\circ\text{C} + \left(-\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}}\right) \cdot 11 \text{ мин}}{-\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} - \left(-\frac{40^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}}\right)} = 7 \text{ мин} \quad (2 \text{ балла})$$

$$T = k_1 t + b_1 = -\frac{50^\circ\text{C}}{7 \text{ мин}} \cdot 7 \text{ мин} + 90^\circ\text{C} = 40^\circ\text{C}$$

Так как получилось, что вода замерзает при 40°C , то сдвиг оси времени произошел на 40°C в положительном направлении оси температур. (2 балла)