



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

9 класс

Заключительный тур

2024-2025

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Из посёлка Звёздный со скоростью 20 км/ч выехал велосипедист. Через час в том же направлении со скоростью 40 км/ч выехал мотоциклист, а ещё через час со скоростью 60 км/ч выехал автомобилист. Через некоторое время автомобиль сломался. Какое расстояние он успел проехать, если в момент поломки сумма расстояний от него до мотоциклиста и до велосипедиста не превышала 20 км?

Ответ: 60 км.

Решение. Пусть t ч – время в пути автомобилиста до поломки. Он успел проехать $60t$ км. Тогда как мотоциклист проехал $40(t + 1)$ км, а велосипедист $20(t + 2)$ км. Расстояния от автомобиля до мотоциклиста и велосипедиста соответственно равны $|60t - 40(t + 1)|$ и $|60t - 20(t + 2)|$.

Получаем неравенство $|60t - 40(t + 1)| + |60t - 20(t + 2)| \leq 20$. После преобразований неравенство примет вид:

$$|t - 2| + 2|t - 1| \leq 1.$$

1. При $t \leq 1$ неравенство примет вид $t \geq 1$, следовательно, получаем $t = 1$;
2. При $t \in (1; 2)$ получаем неравенство $t \leq 1$, то есть, решений при данных t нет;
3. При $t \geq 2$ получаем неравенство $t \leq \frac{5}{3}$, то есть, решений при данных t нет.

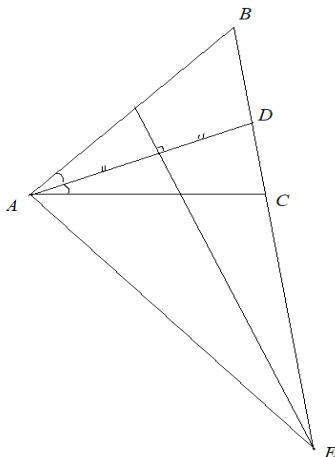
Итак, неравенство имеет единственное решение $t = 1$. Таким образом, автомобиль до поломки успел проехать 60 км.

Критерии оценивания. Если участник рассматривает все случаи расположения велосипедиста и мотоциклиста относительно автомобиля, получает правильный ответ, считаем, что решение верное. Если рассмотрен только один вариант расположения, даже при правильном ответе – 6 баллов. Получено верное неравенство с модулем – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 12 баллов.

2. (12 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD , который пересекает прямую BC в точке E . Найдите $BE : CE$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AE = x$, $CE = y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2}\angle A; \quad \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2}\angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ подобны. Тогда из подобия следует:

$$\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}. \quad \text{Решая систему двух уравнений, находим: } y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 12 баллов.

3. (13 баллов) Имеется 9 различных гирек-эталонов весом 200 г, 300 г, ..., 900 г, 1000 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь весит легче, чем раньше, на 10 г. Как определить эту гирьку за 2 взвешивания на двухчашечных весах без циферблата, не используя других гирь, кроме данных?

Решение. Рассмотрим 3 группы гирь: первая 200 г, 700 г, 900 г; вторая 400 г, 600 г, 800 г; третья 300 г, 500 г, 1000 г. Каждая группа весила бы 1800 г, если бы не было испорченной гирьки. *Первое взвешивание.* Положим на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если одна группа окажется легче, в ней находится испорченная гирька, если же весы будут в равновесии, то испорченная гирька в третьей группе. *Второе взвешивание.* Пусть испорченная гирька в первой группе. На одну чашу весов положим гирьки по 700 и 500 г, на другую 300 и 900 г. При равновесии весов испорчена оставшаяся гирька первой группы – 200 г, так как гирьки по 300 и 500 целые, и будь испорченная 700 г или 900 г, весы бы отклонились от равновесия. Аналогично, если испорченная во второй группе, на одну чашу весов положим гирьки по 400 и 500 г, на другую 300 и 600 г, сразу определив, какая фальшивая из 400 и 600 г, или же фальшивая оставшаяся 800 г. Точно также, если испорченная в третьей группе, опять на одну чашу весов положим гирьки по 400 и 500 г, на другую 300 г и 600 г.

Критерии оценивания. Гирьки поделили на три группы «одинакового» веса – за это 3 балла. Найдена за одно взвешивание группа из трёх гирь, в которой находится испорченная гирька – за это ещё 4 балла, то есть 7 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 баллов) Дана функция $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d и e – целые числа. Известно, что $f(17) = f(135) = 2025$, а $f(0) \in (-3000; -2000)$. Найдите $f(0)$.

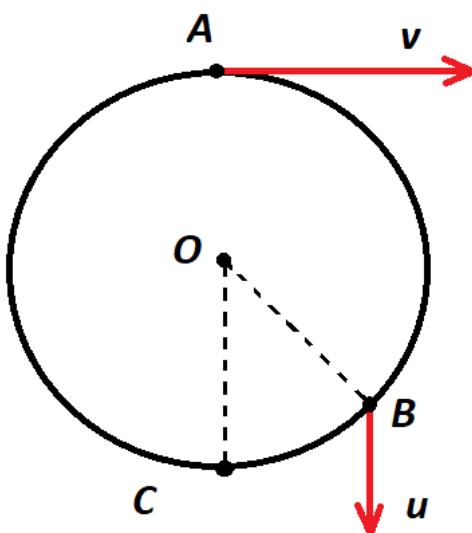
Ответ: -2565 .

Решение. Имеем $f(x) = x \cdot g(x) + e$, где $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда $f(17) = 17 \cdot n + e$, где $n = g(17)$ – целое число, а $f(135) = 135 \cdot m + e$, где $m = g(135)$ – целое число.

Из условия следует, что $17 \cdot n = 135 \cdot m$. Так как 17 и 135 взаимно простые числа, то $n = 135k$, $m = 17k$ и $2025 = 17 \cdot 135k + e$. Получаем $e = 2025 - 2295k = f(0)$, в интервале $(-3000; -2000)$ лежит число -2565 (при $k=2$).

Критерии оценивания. Если отмечено, что $f(0)=e$, то ставим 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение – 13 баллов (задача может быть решена и другими способами).

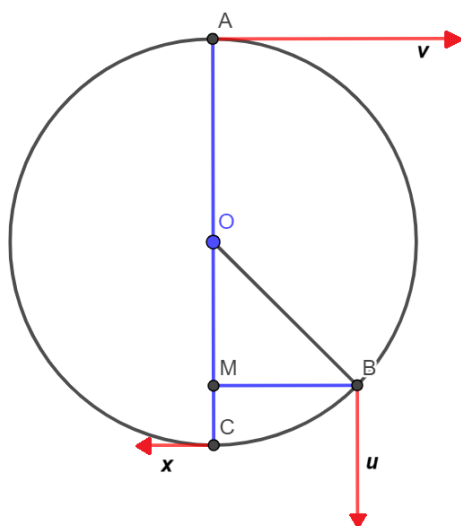
5. (10 баллов) У твердого диска, скользящего в гладкой горизонтальной поверхности, в определенный момент времени скорости некоторых точек диска оказались направленными так, как это показано на рисунке. Скорость v точки А направлена по касательной к диску, а скорость u точки В перпендикулярно скорости v . Известно, что $v=40$ см/с и угол COB равен 45° . Определите направление и значение скорости точки С.



Ответ: 6,9 см/с

Решение:

Проведем прямую через точку А, перпендикулярную вектору v , и прямую через точку В, перпендикулярную вектору u . Пересечением данных перпендикуляров является мгновенная ось вращения – точка М. (2 балла)



Через точку C проведем перпендикуляр к MC, вдоль данного перпендикуляра направлена скорость x в точке C.

Так как M – мгновенная ось вращения, то угловая скорость $\omega = \frac{v}{AM} = \frac{x}{CM}$.

Отсюда $x = v \frac{CM}{AM}$. (4 балла)

Скорости в точках A и B перпендикулярны, тогда $AM \perp MB$.

В $\triangle MOB$: $OM \perp MB$, $\angle COB = \angle MOB = 45^\circ$, следовательно, $MB = OM = OB \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} R$, (2 балла)

где R – радиус окружности.

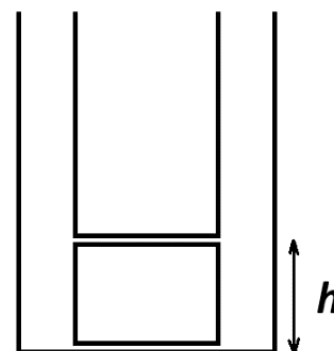
$AM = AO + OM = R + \frac{\sqrt{2}}{2} R = \frac{2+\sqrt{2}}{2} R$. (2 балла)

$CM = CO - OM = R - \frac{\sqrt{2}}{2} R = \frac{2-\sqrt{2}}{2} R$. (2 балла)

$x = v \frac{CM}{AM} = v \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2} R}{\frac{2+\sqrt{2}}{2} R} = v \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = v \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = v \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = v(3 - 2\sqrt{2})$.

$x = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 6,9 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. (3 балла)

6. (10 баллов) Имеются два одинаковых сообщающихся сосуда, которые соединены тонкими трубками. Одна из трубок соединяет сосуда у самого дна, а вторая располагается на $h=40$ см выше (см. рис.). Площадь сечения сосудов $S=100 \text{ см}^2$. В сосудах налили $V_B=10$ л воды, плотность которой $\rho_B=1000 \text{ кг/м}^3$. Затем в один из сосудов налили $V_K=4$ л керосина, плотность которого $\rho_K=800 \text{ кг/м}^3$. Определите конечные уровни жидкости в левом и правом сосуде.



Ответ: 72,5 см; 67,5 см

Решение:

Изначальный уровень воды в каждом сосуде:

$$H = \frac{V_B}{2S} = \frac{10 \text{ л}}{2 \cdot 100 \text{ см}^2} = 50 \text{ см (выше верхней трубки на } \Delta h = H - h). \quad (1 \text{ балл})$$

Пусть в левый сосуд заливают керосин.

Предположим, что после установления равновесия часть керосина окажется в правом сосуде.

Тогда из левого сосуда в правый перешло Δh воды и x керосина. В левом сосуде керосина осталось $L - x$ керосина, где $L = \frac{V_K}{S} = \frac{4 \text{ л}}{100 \text{ см}^2} = 40 \text{ см}$ – суммарный уровень керосина в двух сосудах. (1 балл)

$$\text{Давление жидкостей на дно в левом сосуде } p_1 = \rho_B g h + \rho_K g (L - x); \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{в правом сосуде } p_2 = \rho_B g (H + \Delta h) + \rho_K g x = \rho_B g (2H - h) + \rho_K g x. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Так как сосуды сообщающиеся, то } p_1 = p_2. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\rho_B g h + \rho_K g (L - x) = \rho_B g (2H - h) + \rho_K g x$$

$$\rho_B h + \rho_K L - \rho_K x = \rho_B (2H - h) + \rho_K x$$

$$x = \frac{\rho_K L - 2\rho_B (H - h)}{2\rho_K}$$

$$x = \frac{800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 40 \text{ см} - 2 \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (50 \text{ см} - 40 \text{ см})}{2 \cdot 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 7,5 \text{ см} \quad (1 \text{ балл})$$

Если бы получившееся значение было меньше нуля, то в правый сосуд перетекла бы только часть воды.

$x > 0$, следовательно, наше предположение о том, что керосин перетекает в правый сосуд, верно.

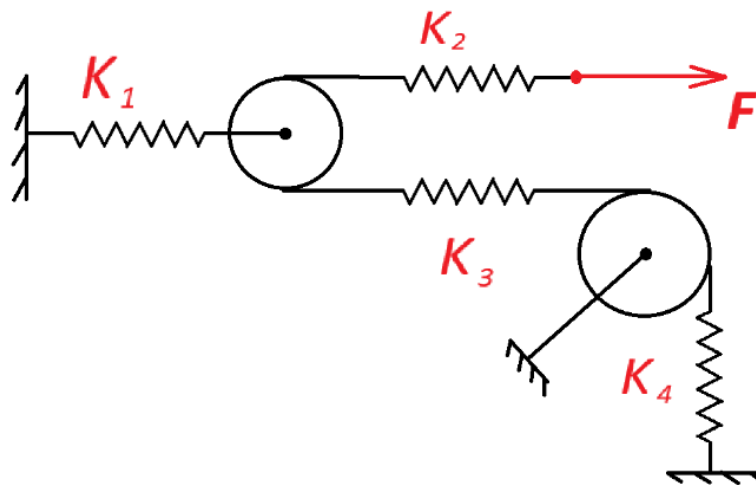
Уровень жидкости в левом сосуде:

$$H_1 = h + L - x = 40 \text{ см} + 40 \text{ см} - 7,5 \text{ см} = 72,5 \text{ см}. \quad (2 \text{ балла})$$

Уровень жидкости в правом сосуде:

$$H_2 = H + \Delta h + x = 2H - h + x = 2 \cdot 50 \text{ см} - 40 \text{ см} + 7,5 \text{ см} = 67,5 \text{ см}. \quad (2 \text{ балла})$$

7. (15 баллов) Имеется конструкция, состоящая из четырех невесомых пружин, одного подвижного и одного неподвижного блоков. Все блоки идеальные. Жесткости пружин: $K_1=200 \text{ Н/м}$, $K_2=K_3=400 \text{ Н/м}$ и $K_4=100 \text{ Н/м}$. К концу второй пружины приложили силу $F=20 \text{ Н}$. Определите эффективную жесткость данной системы, и, на сколько в результате сместится точка приложения силы.



Ответ: 0,7 м; $\approx 28,57$ Н/м

Решение:

Так как пружины 2, 3, 4 соединены одной нитью, то:

$$F_{\text{упр2}} = F_{\text{упр3}} = F_{\text{упр4}} = F. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Из условия равновесия на подвижный блок } F_{\text{упр1}} = 2F. \quad (2 \text{ балла})$$

Удлинения пружин:

$$\Delta x_1 = \frac{F_{\text{упр1}}}{k_1} = \frac{2F}{k_1} = \frac{2 \cdot 20 \text{ Н}}{200 \text{ Н/м}} = 0,2 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_2 = \frac{F_{\text{упр2}}}{k_2} = \frac{F}{k_2} = \frac{20 \text{ Н}}{400 \text{ Н/м}} = 0,05 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_3 = \frac{F_{\text{упр3}}}{k_3} = \frac{F}{k_3} = \frac{20 \text{ Н}}{400 \text{ Н/м}} = 0,05 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_4 = \frac{F_{\text{упр4}}}{k_4} = \frac{F}{k_4} = \frac{20 \text{ Н}}{100 \text{ Н/м}} = 0,2 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

За счет удлинения первой пружины подвижный блок сдвинулся на Δx_1 , из-за чего нить вытянулась на $2\Delta x_1$.

Нить с пружинами 2, 3, 4 “удлинилась” на $\Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4$.

Итого точка приложения силы сместилась на:

$$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 2 \cdot 0,2 \text{ м} + 0,05 \text{ м} + 0,05 \text{ м} + 0,2 \text{ м} = 0,7 \text{ м}. \quad (4 \text{ балла})$$

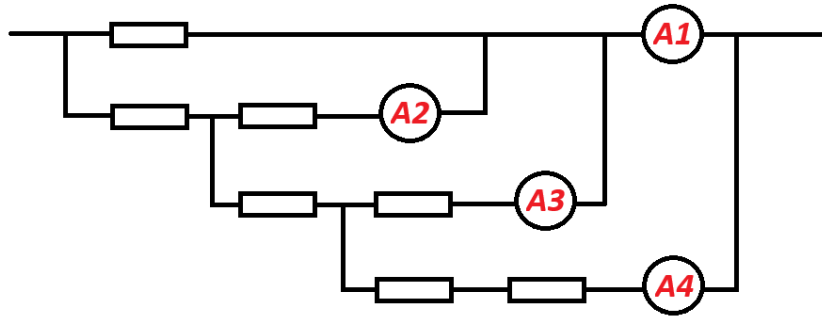
$$\text{Эффективная жесткость системы } k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{20 \text{ Н}}{0,7 \text{ м}} = 28 \frac{4}{7} \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 28,57 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (4 \text{ балла})$$

8. (15 баллов) Электрическая схема состоит из семи одинаковых резисторов и четырех одинаковых идеальных амперметров. Известно, что показания первого А1 амперметра $I_1 = 40$ мА. Определите показания остальных амперметров.

Ответ: 10 мА; 4 мА; 2 мА

Решение:

Пусть сопротивление резисторов R , а напряжение на всей цепи u . Обозначим узлы схемы так, как показано на рисунке (точки В, В' и В'' можно соединить, так как их потенциалы равны).



Найдем эквивалентное сопротивление цепи.

$$R_{DB} = \frac{2R * R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$$

$$R_{CB} = \frac{R(R + R_{DB})}{R + (R + R_{DB})} = \frac{5}{8}R$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_{AB} = \frac{R(R + R_{CB})}{R + (R + R_{CB})} = \frac{13}{21}R \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Общий ток в цепи } I = \frac{u}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{21u}{13R}. \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_{AB'} = \frac{u}{R}$$

$$I_{AC} = I - I_{AB'} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{R} = \frac{8u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$u_{CB} = u - u_{AC} = u - RI_{AC} = u - \frac{8u}{13} = \frac{5u}{13}$$

(1 балл)

$$I_2 = I_{CB'} = \frac{u_{CB}}{R} = \frac{5u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_{CD} = I_{AC} - I_{CB'} = \frac{8u}{13R} - \frac{5u}{13R} = \frac{3u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$u_{DB} = u_{CB} - u_{CD} = u_{CB} - I_{CD}R = \frac{5u}{13} - \frac{3u}{13} = \frac{2u}{13} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_3 = I_{DB'} = \frac{u_{DB}}{R} = \frac{2u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_4 = I_{DB} = \frac{u_{DB}}{2R} = \frac{u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_1 = I_{B''B} = I - I_{DB} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{13R} = \frac{20u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{u}{R} = \frac{13}{20}I_1 = \frac{13}{20} * 40 \text{ мА} = 26 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_2 = \frac{5u}{13R} = \frac{5}{13} * 26 \text{ мА} = 10 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_3 = \frac{2u}{13R} = \frac{2}{13} * 26 \text{ мА} = 4 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_4 = \frac{u}{13R} = \frac{1}{13} * 26 \text{ мА} = 2 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

9 класс

Заключительный тур

2024-2025

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Из посёлка Звёздный со скоростью 16 км/ч выехал велосипедист. Через час в том же направлении со скоростью 32 км/ч выехал мотоциклист, а ещё через час со скоростью 48 км/ч выехал автомобилист. Через некоторое время автомобиль сломался. Какое расстояние он успел проехать, если в момент поломки сумма расстояний от него до мотоциклиста и до велосипедиста не превышала 16 км?

Ответ: 48 км.

Решение. Пусть t ч – время в пути автомобилиста до поломки. Он успел проехать $48t$ км. Тогда как мотоциклист проехал $32(t + 1)$ км, а велосипедист $16(t + 2)$ км. Расстояния от автомобиля до мотоциклиста и велосипедиста соответственно равны $|48t - 32(t + 1)|$ и $|48t - 16(t + 2)|$.

Получаем неравенство $|48t - 32(t + 1)| + |48t - 16(t + 2)| \leq 16$. После преобразований неравенство примет вид:

$$|t - 2| + 2|t - 1| \leq 1.$$

- 1) При $t \leq 1$ неравенство примет вид $t \geq 1$, следовательно, получаем $t = 1$;
- 2) При $t \in (1; 2)$ получаем неравенство $t \leq 1$, то есть, решений при данных t нет;
- 3) При $t \geq 2$ получаем неравенство $t \leq \frac{5}{3}$, то есть, решений при данных t нет.

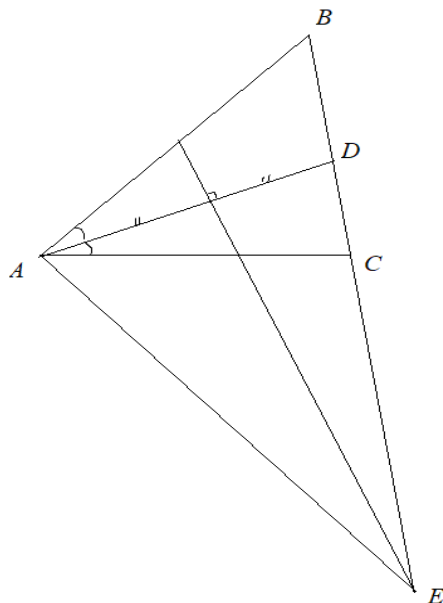
Итак, неравенство имеет единственное решение $t = 1$. Таким образом, автомобиль до поломки успел проехать 48 км.

Критерии оценивания. Если участник рассматривает все случаи расположения велосипедиста и мотоциклиста относительно автомобиля, получает правильный ответ, считаем, что решение верное. Если рассмотрен только один вариант расположения, даже при правильном ответе – 6 баллов. Получено верное неравенство с модулем – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 12 баллов.

2. (12 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 4$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD , который пересекает прямую BC в точке E . Найдите $BE : CE$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AE = x$, $CE = y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2} \angle A; \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2} \angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ подобны. Тогда из подобия следует:

$$\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}. \text{ Решая систему двух уравнений, находим: } y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CAE$ – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 12 баллов.

3. (13 баллов) Имеется 9 различных гирек-эталонов весом 300 г, 400 г, ..., 1000 г, 1100 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь весит легче, чем раньше, на 10 г. Как определить эту гирьку за 2 взвешивания на двухчашечных весах без циферблата, не используя других гирь, кроме данных?

Решение. Рассмотрим 3 группы гирь: первая 300 г, 800 г, 1000 г; вторая 500 г, 700 г, 900 г; третья 400 г, 600 г, 1100 г. Каждая группа весила бы 2100 г, если бы не было испорченной гирьки. *Первое взвешивание.* Положим на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если одна группа окажется легче, в ней находится испорченная гирька, если же весы будут в равновесии, то испорченная гирька в третьей группе. *Второе взвешивание.* Пусть испорченная гирька в первой группе. На одну чашу весов положим гирьки по 800 и 600 г, на другую 400 и 1000 г. При равновесии весов испорчена оставшаяся гирька первой группы – 300 г, так как гирьки по 400 и 600 целые, и будь испорченной 800 г или 1000 г, весы бы отклонились от равновесия. Аналогично, если испорченная гирька во второй группе, на одну чашу весов положим гирьки по 500 и 600 г, на другую 400 и 700 г, сразу определив, какая фальшивая из 500 и 700 г, или же

фальшивая оставшаяся 900 г. Точно также, если испорченная в третьей группе, опять на одну чашу весов положим гири по 500 и 600 г, на другую 400 и 700 г,

Критерии оценивания. Гири поделили на три группы «одинакового» веса – за это 3 балла. Найдена за одно взвешивание группа из трёх гирь, в которой находится испорченная гиря – за это ещё 4 балла, то есть 7 баллов. Полное решение – 13 баллов.

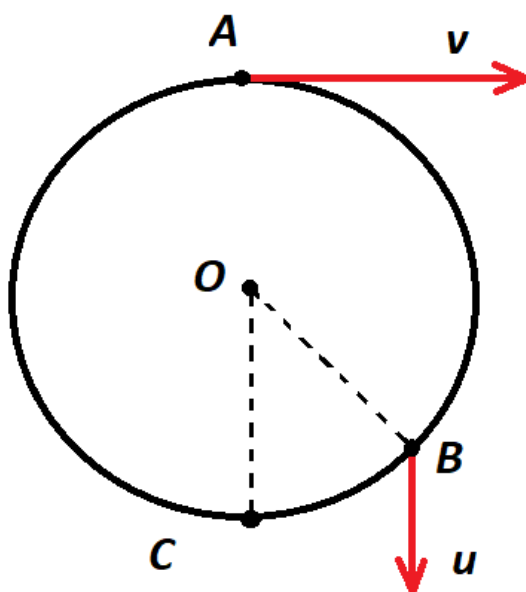
4. (13 баллов) Дана функция $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d и e – целые числа. Известно, что $f(19) = f(135) = 2025$, а $f(0) \in (-4000; -3000)$. Найдите $f(0)$.

Ответ: -3105 .

Решение. Имеем $f(x) = x \cdot g(x) + e$, где $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда $f(19) = 19 \cdot n + e$, где $n = g(19)$ – целое число, $f(135) = 135 \cdot m + e$, где $m = g(135)$ – целое число. Из условия следует, что $19 \cdot n = 135 \cdot m$. Так как 19 и 135 взаимно простые числа, то $n = 135k$, $m = 19k$ и $2025 = 19 \cdot 135k + e$. Тогда $e = 2025 - 2565k = f(0)$, и в интервале $(-4000; -3000)$ лежит число -3105 (при $k=2$).

Критерии оценивания. Если отмечено, что $f(0)=e$, то ставим 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение – 13 баллов (задача может быть решена и другими способами).

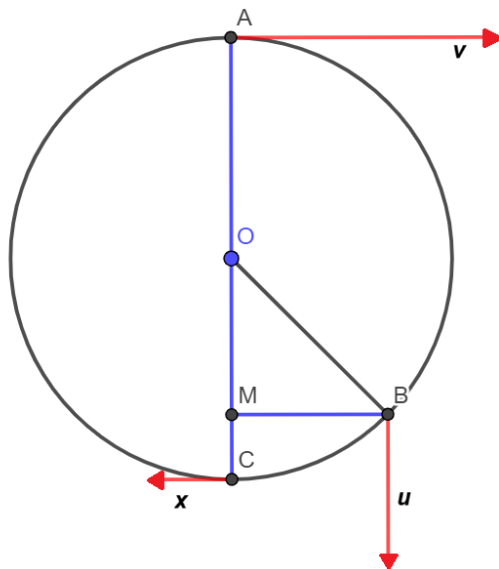
5. (10 баллов) У твердого диска, скользящего в гладкой горизонтальной поверхности, в определенный момент времени скорости некоторых точек диска оказались направленными так, как это показано на рисунке. Скорость v точки А направлена по касательной к диску, а скорость u точки В перпендикулярно скорости v . Известно, что $v=5$ см/с и угол COB равен 45° . Определите направление и значение скорости точки С.



Ответ: 0,86 см/с

Решение:

Проведем прямую через точку А, перпендикулярную вектору v , и прямую через точку В, перпендикулярную вектору u . Пересечением данных перпендикуляров является мгновенная ось вращения – точка М. (2 балла)



Через точку С проведем перпендикуляр к МС, вдоль данного перпендикуляра направлена скорость x в точке С.

Так как М – мгновенная ось вращения, то угловая скорость $\omega = \frac{v}{AM} = \frac{x}{CM}$.

Отсюда $x = v \frac{CM}{AM}$. (4 балла)

Скорости в точках А и В перпендикулярны, тогда $AM \perp MB$.

В $\triangle MOB$: $OM \perp MB$, $\angle COB = \angle MOB = 45^\circ$, следовательно, $MB = OM = OB \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} R$, (2 балла)

где R – радиус окружности.

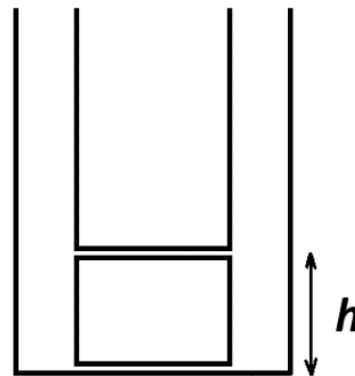
$$AM = AO + OM = R + \frac{\sqrt{2}}{2} R = \frac{2+\sqrt{2}}{2} R. \quad (2 \text{ балла})$$

$$CM = CO - OM = R - \frac{\sqrt{2}}{2} R = \frac{2-\sqrt{2}}{2} R. \quad (2 \text{ балла})$$

$$x = v \frac{CM}{AM} = v \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2} R}{\frac{2+\sqrt{2}}{2} R} = v \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = v \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = v \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = v(3 - 2\sqrt{2}).$$

$$x = 5 \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 0,86 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (3 \text{ балла})$$

6. (10 баллов) Имеются два одинаковых сообщающихся сосуда, которые соединены тонкими трубками. Одна из трубок соединяет сосуда у самого дна, а вторая располагается на $h=40$ см выше (см. рис.). Площадь сечения сосудов $S=100$ см². В сосуды налили $V_B=10$ л воды, плотность которой $\rho_B=1000$ кг/м³. Затем в один из сосудов налили $V_K=4$ л керосина, плотность которого $\rho_K=800$ кг/м³. Определите конечные уровни жидкости в левом и правом сосуде.



Ответ: 72,5 см; 67,5 см

Решение:

Изначальный уровень воды в каждом сосуде:

$$H = \frac{V_B}{2S} = \frac{10 \text{ л}}{2 \cdot 100 \text{ см}^2} = 50 \text{ см (выше верхней трубки на } \Delta h = H - h). \quad (1 \text{ балл})$$

Пусть в левый сосуд заливают керосин.

Предположим, что после установления равновесия часть керосина окажется в правом сосуде.

Тогда из левого сосуда в правый перешло Δh воды и x керосина. В левом сосуде керосина осталось $L - x$ керосина, где $L = \frac{V_K}{S} = \frac{4 \text{ л}}{100 \text{ см}^2} = 40$ см – суммарный уровень керосина в двух сосудах. (1 балл)

Давление жидкостей на дно в левом сосуде $p_1 = \rho_B g h + \rho_K g (L - x)$; (1 балл)

в правом сосуде $p_2 = \rho_B g (H + \Delta h) + \rho_K g x = \rho_B g (2H - h) + \rho_K g x$. (1 балл)

Так как сосуды сообщающиеся, то $p_1 = p_2$. (1 балл)

$$\rho_B g h + \rho_K g (L - x) = \rho_B g (2H - h) + \rho_K g x$$

$$\rho_B h + \rho_K L - \rho_K x = \rho_B (2H - h) + \rho_K x$$

$$x = \frac{\rho_K L - 2\rho_B (H - h)}{2\rho_K}$$

$$x = \frac{800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 40 \text{ см} - 2 \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (50 \text{ см} - 40 \text{ см})}{2 \cdot 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 7,5 \text{ см} \quad (1 \text{ балл})$$

Если бы получившееся значение было меньше нуля, то в правый сосуд перетекла бы только часть воды.

$x > 0$, следовательно, наше предположение о том, что керосин перетекает в правый сосуд, верно.

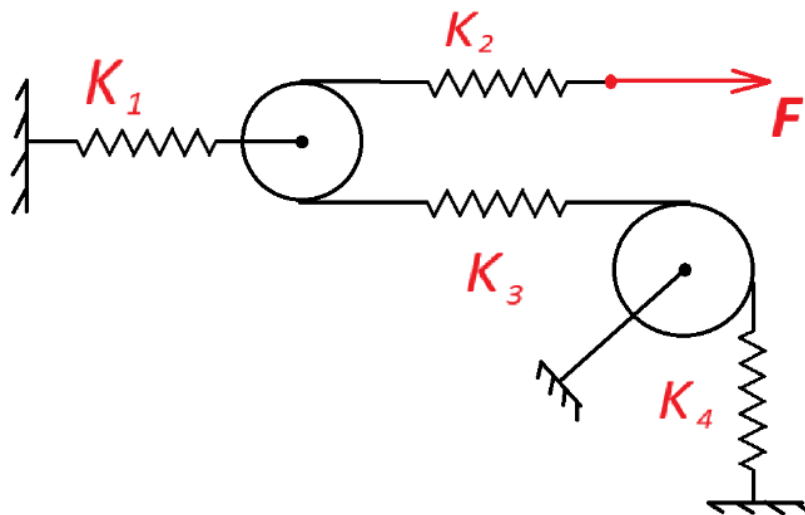
Уровень жидкости в левом сосуде:

$$H_1 = h + L - x = 40 \text{ см} + 40 \text{ см} - 7,5 \text{ см} = 72,5 \text{ см.} \quad (2 \text{ балла})$$

Уровень жидкости в правом сосуде:

$$H_2 = H + \Delta h + x = 2H - h + x = 2 * 50 \text{ см} - 40 \text{ см} + 7,5 \text{ см} = 67,5 \text{ см.} \quad (2 \text{ балла})$$

7. (15 баллов) Имеется конструкция, состоящая из четырех невесомых пружин, одного подвижного и одного неподвижного блоков. Все блоки идеальные. Жесткости пружин: $K_1=300 \text{ Н/м}$, $K_2=K_3=900 \text{ Н/м}$ и $K_4=270 \text{ Н/м}$. К концу второй пружины приложили силу $F=27 \text{ Н}$. Определите эффективную жесткость данной системы, и, на сколько в результате сместится точка приложения силы.



Ответ: 0,52 м; $\approx 51,92 \text{ Н/м}$

Решение:

Так как пружины 2, 3, 4 соединены одной нитью, то:

$$F_{\text{упр2}} = F_{\text{упр3}} = F_{\text{упр4}} = F. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Из условия равновесия на подвижный блок } F_{\text{упр1}} = 2F. \quad (2 \text{ балла})$$

Удлинения пружин:

$$\Delta x_1 = \frac{F_{\text{упр1}}}{k_1} = \frac{2F}{k_1} = \frac{2 \cdot 27 \text{ Н}}{300 \text{ Н/м}} = 0,18 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_2 = \frac{F_{\text{упр2}}}{k_2} = \frac{F}{k_2} = \frac{27 \text{ Н}}{900 \text{ Н/м}} = 0,03 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_3 = \frac{F_{\text{упр3}}}{k_3} = \frac{F}{k_3} = \frac{27 \text{ Н}}{900 \text{ Н/м}} = 0,03 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\Delta x_4 = \frac{F_{\text{упр4}}}{k_4} = \frac{F}{k_4} = \frac{27 \text{ Н}}{270 \text{ Н/м}} = 0,1 \text{ м} \quad (1 \text{ балл})$$

За счет удлинения первой пружины подвижный блок сдвинулся на Δx_1 , из-за чего нить вытянулась на $2\Delta x_1$.

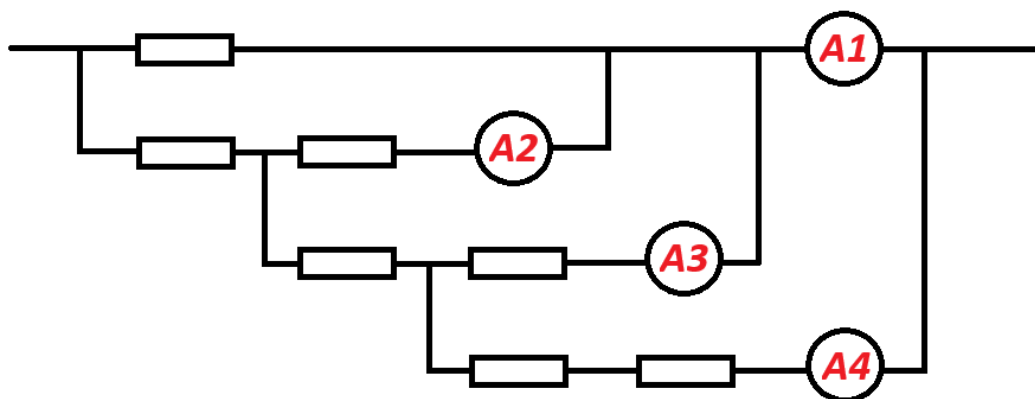
Нить с пружинами 2, 3, 4 “удлинилась” на $\Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4$.

Итого точка приложения силы сместилась на:

$$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 2 * 0,18 \text{ м} + 0,03 \text{ м} + 0,03 \text{ м} + 0,1 \text{ м} = 0,52 \text{ м}. \quad (4 \text{ балла})$$

$$\text{Эффективная жесткость системы } k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{27 \text{ Н}}{0,52 \text{ м}} = 51,92 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (4 \text{ балла})$$

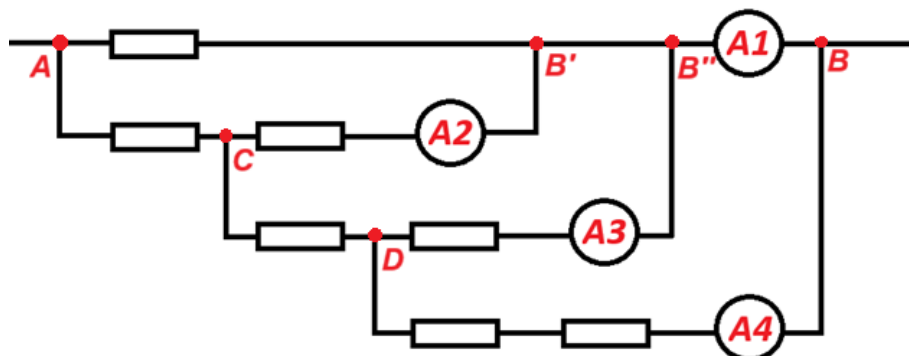
8. (15 баллов) Электрическая схема состоит из семи одинаковых резисторов и четырех одинаковых идеальных амперметров. Известно, что показания первого А1 амперметра $I_1=600 \text{ мА}$. Определите показания остальных амперметров.



Ответ: 150 мА; 60 мА; 30 мА

Решение:

Пусть сопротивление резисторов R , а напряжение на всей цепи U . Обозначим узлы схемы так, как показано на рисунке (точки В, В' и В'' можно соединить, так как их потенциалы равны).



Найдем эквивалентное сопротивление цепи.

$$R_{DB} = \frac{2R * R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$$

$$R_{CB} = \frac{R(R + R_{DB})}{R + (R + R_{DB})} = \frac{5}{8}R$$

$$R_{\text{экв}} = R_{AB} = \frac{R(R + R_{CB})}{R + (R + R_{CB})} = \frac{13}{21}R \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Общий ток в цепи } I = \frac{u}{R_{\text{экв}}} = \frac{21u}{13R}. \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_{AB'} = \frac{u}{R}$$

$$I_{AC} = I - I_{AB'} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{R} = \frac{8u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$u_{CB} = u - u_{AC} = u - RI_{AC} = u - \frac{8u}{13} = \frac{5u}{13} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_2 = I_{CB'} = \frac{u_{CB}}{R} = \frac{5u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_{CD} = I_{AC} - I_{CB'} = \frac{8u}{13R} - \frac{5u}{13R} = \frac{3u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$u_{DB} = u_{CB} - u_{CD} = u_{CB} - I_{CD}R = \frac{5u}{13} - \frac{3u}{13} = \frac{2u}{13} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_3 = I_{DB'} = \frac{u_{DB}}{R} = \frac{2u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_4 = I_{DB} = \frac{u_{DB}}{2R} = \frac{u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_1 = I_{B''B} = I - I_{DB} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{13R} = \frac{20u}{13R} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{u}{R} = \frac{13}{20}I_1 = \frac{13}{20} * 600 \text{ мА} = 390 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_2 = \frac{5u}{13R} = \frac{5}{13} * 390 \text{ мА} = 150 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_3 = \frac{2u}{13R} = \frac{2}{13} * 390 \text{ мА} = 60 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$

$$I_4 = \frac{u}{13R} = \frac{1}{13} * 390 \text{ мА} = 30 \text{ мА} \quad (1 \text{ балл})$$