ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17101 для 10 класса

1. Во сколько раз число A больше или меньше числа B, если

$$A = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{2022 \text{ раз}} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{2021 \text{ раз}} + \ldots + 2021 + 2021 + 2022,$$

$$B = \underbrace{2023 + \ldots + 2023}_{2022 \text{ раз}} + \underbrace{2022 + \ldots + 2022}_{2021 \text{ раз}} + \ldots + 3 + 3 + 2.$$

Решение

Число B вычислим в соответствии с его записью как

$$B = \sum_{m=1}^{2022} Q_m, \quad \text{где} \quad Q_m = (m+1)m.$$

Число A перепишем как сумму арифметических прогрессий

$$A = 1 + (1+2) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + 2021) + (1 + 2 + \ldots + 2022).$$

Тогда

$$A = \sum_{m=1}^{2022} S_m, \quad \text{где} \quad S_m = (m+1)m/2.$$

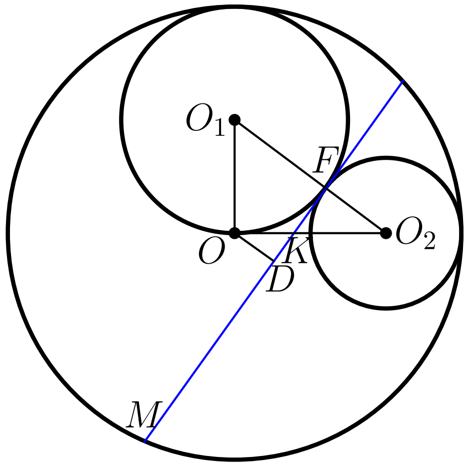
Теперь видно, что A и B представляют собой суммы с равным количеством слагаемых, но каждое слагаемое в A вдвое меньше соответствующего слагаемого в B.

Ответ: в два раза меньше ($A = \frac{1}{2}B$).

2. Две окружности касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается внутренним образом большей окружности. Радиус одной в два раза, а другой – в три раза меньше радиуса наибольшей окружности. Найдите отношение длины отрезка общей внутренней касательной к малым окружностям, заключенного внутри наибольшей, к ее диаметру.

Решение

Пусть радиусы малых окружностей равны $2r$ и $3r$. Тогда радиус наибольшей (внешней) равен $6r$.



Рассмотрим $\triangle O_1OO_2$. Его стороны равны $3r$, $4r$ и $5r$, следовательно, он прямоугольный.

Обозначим точку пересечения искомой хорды (на рис. обозначена синим) с отрезком O_1O_2 через F, а с отрезком OO_2 через K. Опустим из центра наибольшей окружности перпендикуляр OD на искомую хорду (отрезок общей касательной). Тогда искомая хорда делится точкой D пополам и перпендикулярна отрезкам OD и O_1O_2.

Прямоугольные треугольники O_1OO_2, KFO_2, KDO подобны. Поэтому $\dfrac{KO_2}{FO_2} = \dfrac{O_1O_2}{OO_2}$, откуда $KO_2 = \frac{5}{2}r$ и $KO = \frac{3}{2}r$.

Далее, $\dfrac{OD}{KO} = \dfrac{OO_2}{O_1O_2}$, откуда $OD = \frac{6}{5}r$.

Из прямоугольного треугольника ODM находим половину искомой хорды $MD^2 = (6r)^2 - \left(\frac{6}{5}r\right)^2 = \frac{36\cdot 24}{25}r$.

Искомое отношение хорды к диаметру равно $\dfrac{MD}{6r} = \dfrac{\sqrt{24}}{5} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

3. Дан прямоугольный параллелепипед. Периметры каждой из его трех взаимно перпендикулярных граней равны сторонам нового прямоугольного параллелепипеда. Каким может быть минимальное отношение объема нового параллелепипеда к объему исходного?

Решение

Пусть x, y, z — стороны исходного параллелепипеда. Тогда объем нового равен

$$V_2 = 2\cdot(x+y)\cdot 2\cdot(y+z)\cdot 2\cdot(z+x).$$

Искомое отношение объемов есть

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{8(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{8(xy+y^2+xz+yz)(z+x)}{xyz} =$$
$$= \frac{8(2xyz+y^2z+xz^2+yz^2+x^2y+xy^2+x^2z)}{xyz} =$$
$$= 8\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

Пользуемся тем, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$, получаем

$$\frac{V_2}{V_1} \geq 8(2+2+2+2) = 64.$$

Ответ: 64.

4. Может ли уравнение

$$x^{2022} - 2\,x^{2021} - 3\,x^{2020} - \ldots - 2022\,x - 2023 = 0$$

иметь два положительных корня?

Решение 1

Докажем, что это невозможно.

От исходного уравнения перейдем к уравнению, в котором коэффициенты многочлена образуют произвольную перестановку $(a_2, a_3, \ldots, a_{2023})$ из чисел $\{2, 3, \ldots, 2023\}$:

$$x^{2022} - a_2\,x^{2021} - a_3\,x^{2020} - \ldots - a_{2022}\,x - a_{2023} = 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, т.к. при его подстановке в уравнение получим:

$$-a_{2023} = 0,$$

что неверно.

Перенесём все отрицательные члены направо, а затем поделим уравнение на x^{2022} (при условии $x \neq 0$):

$$x^{2022} = a_2\,x^{2021} + a_3\,x^{2020} + \ldots + a_{2022}\,x + a_{2023}$$

$$1 = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2022}}{x^{2021}} + \frac{a_{2023}}{x^{2022}}$$

В правой части уравнения получили строго монотонно убывающую на положительной полуоси функцию:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2022} \frac{a_{k+1}}{x^k}$$

Доказательство строгой монотонности: пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 < x_2$. Тогда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$ выполнено:

$$\frac{a_{k+1}}{x_2^k} < \frac{a_{k+1}}{x_1^k} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Строгое монотонное убывание $f(x)$ на положительной полуоси означает, что она пересекает горизонтальную прямую $y = 1$ в единственной точке, которая и будет единственным положительным корнем исходного уравнения.

Решение 2

От исходного уравнения перейдем к уравнению, в котором коэффициенты многочлена образуют произвольную перестановку $(a_2, a_3, \ldots, a_{2023})$ из чисел $\{2, 3, \ldots, 2023\}$:

$$x^{2022} - a_2\, x^{2021} - a_3\, x^{2020} - \ldots - a_{2022}\, x - a_{2023} = 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, т.к. при его подстановке в уравнение получим:

$$-a_{2023} = 0,$$

что неверно.

Свободный член $-a_{2023}$ выражает произведение всех корней многочлена. По следствию из основной теоремы алгебры знаем, что у многочлена 2022-ой степени 2022 корня, то есть четное число. Произведение четного числа отрицательных корней было бы положительным числом. Значит, хотя бы один корень положительный. Покажем, что больше одного положительного корня у многочлена быть не может.

Перенесём все отрицательные члены направо, а затем поделим уравнение на x^{2022} (при условии $x \neq 0$):

$$x^{2022} = a_2\, x^{2021} + a_3\, x^{2020} + \ldots + a_{2022}\, x + a_{2023}$$

$$1 = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2022}}{x^{2021}} + \frac{a_{2023}}{x^{2022}}$$

Обзначим $y = \dfrac{1}{x}$. Перепишем уравнение в виде:

$$a_2\, y + a_3\, y^2 + \ldots + a_{2022}\, y^{2021} + a_{2023}\, y^{2022} = 1$$

Пусть у исходного многочлена имеются по крайней мере 2 различных положительных корня: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Пусть, для определенности, $x_2 < x_1$.

Тогда у многочлена относительно y тоже имеются 2 различных положительных корня: $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$

$$x_2 < x_1 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow y_2 = y_1 + r,\ r > 0$$

Подставим корни y_1, y_2 в уравнение:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2022}\, y_1^{2021} + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, y_2 + a_3\, y_2^2 + \ldots + a_{2022}\, y_2^{2021} + a_{2023}\, y_2^{2022} = 1 \end{cases}$$

Раскроем $y_2 = y_1 + r$ во втором уравнении:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, (y_1 + r) + a_3\, (y_1 + r)^2 + \ldots + a_{2023}\, (y_1 + r)^{2022} = 1 \end{cases}$$

Раскроем биномы во втором уравнении:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, y_1 + a_2\, r + a_3\, y_1^2 + a_3\, (2y_1 r + r^2) + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} + a_{2023}\, \sum_{k=1}^{2022} C_{2022}^k y_1^{2022-k} r^k = 1 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$a_2\, r + a_3\, (2y_1 r + r^2) + \ldots + a_{2023}\, \sum_{k=1}^{2022} C_{2022}^k y_1^{2022-k} r^k = 0$$

Заметим, $y_1 > 0$, $a_k > 0$, множитель r входит в каждое слагаемое, значит:

$$r = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

То есть исходный многочлен имеет единственный положительный корень.

5. Найдите максимальное значение величины $x^2 + y^2$, если известно, что

$$x^2 + y^2 = 3x + 8y.$$

Решение

1 способ

Введем декартову систему координат и рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a}$ с координатами (x, y) и фиксированный вектор $\mathbf{c}$ с координатами $(3, 8)$.

Тогда левая часть условия представляет собой квадрат длины вектора **a**, а правая – скалярное произведение векторов **a** и **c**:

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Оценивая скалярное произведение через длины сомножителей, получаем

$$|\mathbf{a}|^2 \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{c}|.$$

Как известно, равенство возможно и достигается при векторах, лежащих на одной прямой. Поэтому максимальное значение будет достигаться, например, при $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.

Подставляя значения, получаем $3^2 + 8^2 = 73$.

2 способ

Преобразуем условие, выделив полные квадраты.

$$x^2 + y^2 = 3x + 8y \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \tfrac{73}{4}.$$

Таким образом, точки заданного множества лежат на окружности с центром в точке $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. Точки с фиксированным значением величины $x^2 + y^2$ также лежат на окружности (с центром начале координат), поэтому искомая точка будет точкой касания полученной окружности внутренним образом с окружностью $x^2 + y^2 = \mathrm{Const}$. Эта точка касания, в свою очередь, лежит на диаметре, соединяющем центры окружностей, поэтому остается подставить $y = \frac{8}{3}x$ в условие.

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{8}{3}x - 4\right)^2 = \tfrac{73}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{73}{9}\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{73}{4},$$

откуда $x = 0$ или $x = 3$. Для второго значения получаем $y = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8$, откуда $x^2 + y^2 = 9 + 64 = 73$.

Ответ: 73.