ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17881 для 8 класса

1. Во время ночной смены четверо дежурных съели целый бочонок соленых огруцов. Если бы ассистент Мурр съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его десятая часть. Если бы лаборант Тротт съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его восьмая часть. Если бы стажер Глупп съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его четверть. Какая часть содержимого бочонка осталась бы, если бы в два раза меньше съел ординатор Штосс?

Решение

Предположим, что каждый ел в два раза меньше. Тогда была бы съедена ровно половина бочонка. Из оставшейся половины на долю Мурра, Тротта и Глуппа приходится $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ части бочонка соответственно. Следовательно, на долю Штосса приходится

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{40}.$$

Ответ: $\frac{1}{40}$ часть.

2. Смышленая Дуся раскладывает шесть шпаргалок в четыре тайных кармана так, чтобы шпаргалки 1-я и 2-я оказались в одном и том же кармане, 4-я и 5-я тоже оказались в одном и том же кармане, но не в том, где 1-я. Остальные могут лежать как угодно, но только один карман может остаться пустым (либо же все заполнятся). Сколькими различными способами можно это сделать?

Решение

Будем рассуждать конструктивно и в лоб. Положим шпаргалки 1-ю и 2-ю в любой карман. Это можно сделать 4-мя способами. Теперь положим шпаргалки 4-ю и 5-ю в любой свободный карман. Это можно сделать 3-мя способами. Итого 12 способов. Остаются две шпаргалки (3-я и 6-я) и два свободных кармана. Возможны два варианта. Если пустых карманов нет, то для оставшихся шпаргалок есть два способа расположения. Если же один из двух карманов – пуст, то оставшиеся шпаргалки можно разложить по трем непустым карманам тремя различными способами.

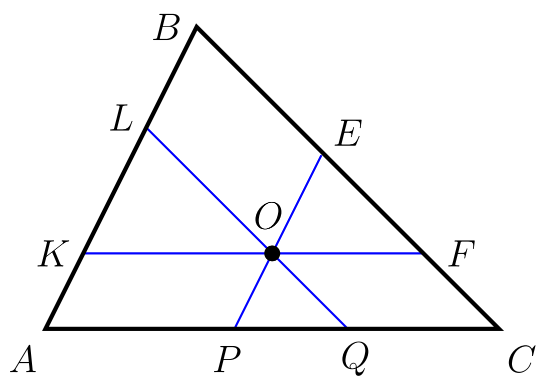
Итого получается $12 \cdot (2+2\cdot(2+3)) = 144$ способа.

Ответ: 144 способа.

3. Через точку, лежащую внутри треугольника, параллельно его сторонам проведены три прямые, которые разбивают треугольник на шесть частей: три треугольника и три четырехугольника. Площади всех трех внутренних треугольников равны. Определите, в каком диапазоне может лежать отношение площади каждого внутреннего треугольника к площади исходного.

Решение

Проведем $KF \parallel AC$, $LQ \parallel BC$, $PE \parallel AB$.



Треугольники KLO, OEF, POQ подобны друг другу и треугольнику ABC (их соответствующие углы равны как углы при параллельных прямых). Обозначим их площади S_1, S_2, S_3, а площадь исходного треугольника S.

Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадраты их (подобных) сторон, то

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{KO}{AC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{OF}{AC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{PQ}{AC}.$$

$AKOP$ и $QOFC$ – параллелограммы, следовательно,

$$KO + PQ + OF = AC.$$

Таким образом,

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1.$$

Согласно условию $S_1 = S_2 = S_3$. Тогда

$$1 = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{3\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}.$$

Следовательно, $S_1 = \frac{1}{9}S$.

Ответ: указанное отношение может быть равно только $\frac{1}{9}$.

4. Четыре менеджера по перекладыванию доложили: «Если их разложить по парам, то останется 1. Если их разложить по тройкам, то тоже останется 1. Если же их разложить по четыре, то останется 2, и если их разложить по пять, то тоже останется 2». Должен ли начальник отдела приема докладов поверить такому сообщению? Выясните, какое максимальное количество верных утверждений может быть среди этих четырех высказываний (возможно, все) и для каждого максимального набора непротиворечивых высказываний найдите наименьшее количество раскладываемых объектов, учитывая, что их не менее тысячи.

Решение

Пусть a – искомое количество. Если при раскладывании по 4 остается 2, то a четно. Но тогда при раскладывании по два не может остаться 1. Следовательно, эти два высказывания противоречивы и сообщение в целом ложно.

Уберем одно из противоречащих высказываний.

1 вар.: оставим раскладывание по 3, по 4 и по 5. Из условия следует, что число $a-2$ делится на 4 и на 5. Поэтому $a = 20n+2$. Также по условию $a = 3k+1$. Составим уравнение $3k+1 = 20n+2$. Или, что то же,

$$3k = 20n+1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{20n+1}{3}.$$

Наименьшее n, при котором $a \geq 1000$ есть $n = 50$. Простым перебором убеждаемся, что при $n = 52$ полученная дробь дает целое k. Таким образом, в этом случае $a = 1042$.

2 вар.: оставим раскладывание по 2, по 3 и по 5. Из условия следует, что число $a-1$ делится на 2 и на 3. Поэтому $a = 6n+1$. Также по условию $a = 5k+2$. Составим уравнение $5k+2 = 6n+1$. Или, что то же,

$$6n = 5k+1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5k+1}{6}.$$

Наименьшее k, при котором $a \geq 1000$ есть $k = 200$. Простым перебором (по нечетным k) убеждаемся, что при $k = 205$ полученная дробь дает целое n. Таким образом, в этом случае $a = 1027$.

Ответ: Не должен верить.

Если оставить раскладывание по 3, по 4 и по 5, то $a = 1042$.

Если оставить раскладывание по 2, по 3 и по 5, то $a = 1027$.

5. Представьте число $\frac{3}{7}$ в виде суммы нескольких различных обыкновенных дробей, числители которых равны единице.

Решение

Пользуемся тем, что

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Тогда

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} =$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{57} + \frac{1}{56 \cdot 57}.$$

Возможны иные варианты.

В качестве ответа принималось также любое другое верное представление.