

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17661 для 6-го класса

Решить задачу – это не угадать ответ! Объяснить решение – это не только дать ответ. Решение должно содержать логическое обоснование всех его этапов с формулировкой предположений и выводов.

1. На съемочной площадке фильма «Кабачки: вторжение рассады» актёры стали очень капризными. На 6 артистов осталось только 3 роли: одна из них главная, другая – второго плана, а третья эпизодическая. Главный герой появляется на экране чаще всех, герой второго плана – реже, чем главный, а эпизодический персонаж – реже, чем второплановый. Артист Ляпкин говорит, что не будет сниматься, если в главной роли не будет Жабкина. Шапкин откажется от съёмок, если он будет появляться на экране чаще, чем Тапкин. Также Шапкин не работает вместе с Охапкиным. Тапкин не подпишет контракт, если в кино одновременно снимутся и Жабкин, и Охапкин. Тапкин также не участвует, если Охапкин сыграет главную роль или Шапкин сыграет эпизодическую. Тряпкин откажется от роли, если он появится на экране реже, чем Тапкин или Жабкин. Жабкин не хочет играть роль второго плана; он также не хочет сниматься в эпизодической роли, если главную роль или роль второго плана заберет себе Тряпкин. А ещё Жабкин не хочет сниматься вместе с Ляпкиным, если при этом в главной или роли второго плана не засветится Охапкин. Охапкин согласен участвовать в съемках, если главную роль сыграет либо он сам, либо Тапкин. Каких трех артистов режиссеру надо выбрать на три роли, чтобы учесть все пожелания? Покажите ход своих рассуждений.

Решение. Главную роль играет Тапкин, роль второго плана – Шапкин, в эпизоде снимется Жабкин.

Главная цель задачи – найти такой вариант, где не было бы смысловых противоречий. Начнем с первого логического высказывания и предположим, что Жабкин играет главную роль. Тогда в кино снимается Ляпкин. Но отказывается от съёмок Тряпкин, поскольку он появляется на экране реже Жабкина. Итак, пока из кандидатов остаются Ляпкин, Шапкин, Охапкин и Тапкин. Рассмотрим требования Охапкина: он тоже выбывает, поскольку на главную роль выбрали не его и не Тапкина. Но тогда мы получаем противоречие: из рассуждений вытекает, что Жабкин вообще не снимается, поскольку он не хочет быть в одной картине с Ляпкиным без Охапкина в роли второго плана. Значит, Жабкин не может играть главную роль.

Мы знаем, что Жабкин не хочет играть роль второго плана. Тогда допустим, что Жабкин снимается в эпизоде. Значит, в кино не снимается Ляпкин (у Жабкина не главная роль) и Тряпкин, поскольку Жабкин отказывается сниматься, если Ляпкин играет главную роль или роль второго плана. Остаётся рассмотреть кандидатов Шапкина, Тапкина, Охапкина. Если участвует Охапкин, то не участвует Шапкин. Тапкин также не снимается, если в кино будут Жабкин и Охапкин одновременно. Таким образом, кандидатов остаётся меньше, чем ролей, и мы вновь получили противоречие. Отсюда следует, что не участвует Охапкин. Остаются Шапкин и Тапкин. Шапкин не хочет появляться на экране чаще Тапкина, следовательно, Тапкин будет играть главную роль, а Шапкин – роль второго плана. Противоречий не выявлено, все просьбы актёров удовлетворены, следовательно, задача решена.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

2. Индеец Зоркий Орёл сделал для потомков хитрый шифр. Каждой цифре (не числу!) в нём соответствует своя особая буква. Одна и та же буква не может соответствовать двум цифрам одновременно. В наши дни археологи установили, что сумма всех цифр в данных словах равна следующим числам:

ВЕС – 5, СОМ – 21, МОСТ – 26, СТО – 17, СТОЛ – 23.

Какое число соответствует слову МОЛОТ? (Суммировать его цифры не нужно, необходимо просто составить число из цифр, соответствующих буквам).

Решение. Посмотрим на слово ВЕС. Сумма цифр, соответствующая слову, может распределиться так: $2+3+0$ или $4+1+0$. Из слова СОМ мы можем заключить, что максимальная сумма цифр, соответствующая буквам О и М, должна быть не больше, чем $21-4=17$, и максимально возможные цифры для этого – 8 и 9. Если бы буква С была равна 3, то «сумма» $O+M$ была бы равна 18. Для этого и О, и М соответствовала бы одна и та же цифра 9, а этого быть по условию не может. Остальные комбинации тоже дают неподходящие результаты: при $C=2$ $O+M=19$, а суммой двух цифр число 19 уже не выразить, аналогично не выразить суммой двух цифр числа 20 и 21 при $C=1$ и $C=0$ соответственно. Отсюда $C=4$, и $O+M=17$. Далее посмотрим на слово МОСТ. Мы знаем, что $M+O=17$, $C=4$, тогда $T=26-17-4=5$. Тогда мы вычислим букву О из слова СТО: так как $C+T=4+5=9$, то $O=17-9=8$. Отсюда для слова СТОЛ буква Л= $23-C-T-O=23-4-5-8=6$. Буква М= $17-O=9$. Теперь мы можем составить из найденных цифр слово МОЛОТ: 98685.

3. Корова Пеструшка рассказала, что в ее стаде 27 голов, включая её саму. Каждая корова в стаде общается ровно с семью коровами. «Не может этого быть!» - ответила ей подруга, свинья Хавронья. Права Хавронья или нет? Почему?

Решение. Отметим всех коров в стаде точками (назовём их *вершинами*). Соединим линиями пары точек, соответствующие которым коровы общаются (назовём эти линии *рёбрами*). Если права Пеструшка, то сумма количества линий, выходящих из таких точек-вершин (они называются *степени вершин*), равна $27 \cdot 7 = 189$ – нечётному числу. Но сумма степеней вершин должна быть чётной, поскольку она равна удвоенному количеству рёбер. (Ребро соединяет 2 вершины, поэтому когда мы считаем сумму степеней вершин, мы считаем каждое ребро дважды). Получили противоречие, значит, права Хавронья.

4. Храбрый Портняжка решил рассортировать свои лоскутки по двум стопкам. У него есть только два цвета ткани – синяя и зеленая. Он достает лоскутки по одному и сортирует по правилу: класть лоскуток на другой лоскуток того же цвета нельзя (его отправляют в другую стопку). Как только герою попадутся три лоскута одного цвета подряд, сортировку он в этот день прекратит и отложит до завтра. Сегодня лоскутки номер 14 и 15 были синие, а двадцать седьмой лоскуток оказался зеленым. Какого цвета должен быть двадцать восьмой лоскуток, положенный в одну из стопок (сортировка была непрерывной и на данном лоскутке сегодня не закончилась)?

Решение. Поскольку 14-й и 15-й лоскутки были одного цвета, то их Портняжка положил в разные стопки. Поэтому на данном этапе сверху в обеих стопках лежат синие лоскутки. Рассмотрим следующие 12 лоскутов (с 16-й по 27-й). Пусть k из них положили в одну стопку, а $(12-k)$ – в другую. Так как числа k и $(12-k)$ одной чётности, то после выкладывания

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

27-го лоскутика верхние лоскутки в стопках будут снова одного цвета. Поэтому если 27-й лоскуток оказался зелёным, то следующий лоскут должен оказаться синим.

5. На межгалактическом конкурсе по завязыванию шнурков собрались 19 участников. Часть из них успела перед конкурсом обменяться между собой приветствиями на своих языках. Покажите, что найдутся два участника конкурса, которые обменялись приветствиями с одинаковым числом конкурсантов.

Решение. Предположим, что все конкурсанты обменялись приветствиями с разным количеством участников. Возможны разные варианты: кто-то не обменялся приветствиями ни с кем, кто-то обменялся ими с одним конкурсантом, с двумя и так далее до 18-ти (если участник обменялся приветствиями со всеми остальными). Всего получается как раз 19 вариантов, но обмен приветствиями – взаимный процесс, и если кто-то обменялся приветствиями со всеми конкурсантами, то уже не может быть участника, который не обменялся бы приветствиями ни с кем. Таким образом, остаются 18 вариантов для 19 конкурсантов, и найдутся два участника, которые обменялись бы одинаковым количеством приветствий.