Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

# ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
# ВАРИАНТ 17881 для 8 класса

1. В шестизначном числе $A$, начинающемся цифрой 1, переставили первую цифру в конец и получили большее число, кратное исходному. Найдите наибольшее возможное значение числа $A$.

**Решение**.

Число $A$ можно представить в виде $A = 10^5 + x$, где $x$ – некоторое пятизначное число. После перестановки первой цифры в конец будет получено новое число $B$, которое запишется как $B = 10x + 1$.

По условию, $B \vdots A$. Следовательно, существует такое натуральное $n$, что

$$10x + 1 = n \cdot (10^5 + x),$$

или, выделяя $x$

$$x \cdot (10 - n) = n \cdot 10^5 - 1,$$

откуда сразу следует, что $n < 10$.

Дальше можно воспользоваться перебором. Предварительно заметим, что слева стоит нечетное число, заканчивающееся цифрой 9. Поэтому множитель $(10 - n)$ может принимать только значения $1, 3, 7, 9$.

При $10 - n = 1 \Rightarrow n = 9$ получаем $x = 899\,999 > 10^4$. Это значение не подходит.

При $10 - n = 3 \Rightarrow n = 7$ получаем $x = 699\,999/3 = 233\,333 > 10^4$, что также не подходит.

При $10 - n = 7 \Rightarrow n = 3$ получаем $x = 299\,999/7 = 42\,857$ (можно разделить в столбик). Это значение подходит.

При $10 - n = 9 \Rightarrow n = 1$ получаем $x = 1111$, следовательно $A = B = 11111$. По условию, число $B$ больше, чем $A$, значит этот вариант нам тоже не подходит.

**Ответ:** $A = 142\,857$.

2. Шофер суперавтобуса ПАЗ-3206 решил узнать на практике прожорливость своего двигателя (измеряемую в литрах на 100 км пути). Для этого он залил полный бак и начал отсчитывать пробег. Израсходовав весь бак, он снова заполнил его и повторял так несколько раз. Когда бак в очередной раз почти опустел, шофер разделил объем всех потраченных полных баков на пройденное расстояние (в сотнях км) и получил нужную величину. Определите, сколько раз нужно было заправиться, чтобы полученная величина отличалась от истинной не более, чем на 1%, если в момент расчета бак был заполнен не более, чем на четверть. Как изменится ответ, если увеличить объем бака в полтора раза?

**Решение**.

Обозначим объем бака через $V$, пройденный путь через $S$ (в сотнях км), а остаток топлива в момент расчета через $w$. Пусть было истрачено $k$ баков.

Тогда вычисленная шофером прожорливость двигателя равна

$$q = \frac{k \cdot V}{S},$$

а истинная равна

$$p = \frac{k \cdot V - w}{S}.$$

Ясно, что $q > p$ и

$$q - p = \frac{w}{S}.$$

Ошибка не превышает 1%, если $\dfrac{q-p}{p} \leq 0{,}01$.

Тогда получаем

$$\frac{q-p}{p} = \frac{w}{k \cdot V - w} = \frac{1}{k \cdot \frac{V}{w} - 1} \leq 0{,}01.$$

Выразим $k$.

$$k \geq 101 \cdot \frac{w}{V}.$$

Поскольку неравенство должно быть верным для любого значения $w$ в заданном диапазоне, то справа нужно взять максимально возможное значение. Согласно условию, $\dfrac{w}{V} \leq \dfrac{1}{4}$, поэтому

$$k \geq 101 \cdot \frac{1}{4} = 25{,}25.$$

С учетом целочисленности $k$ получаем минимальное значение 26.

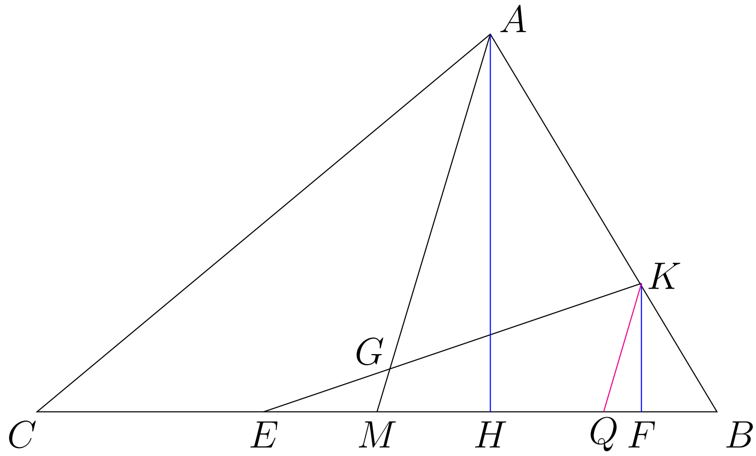
Так как анализируется относительная величина и в условии дано отношение объемов, то ответ не изменится при изменении объема бака.

**Ответ:** не менее 26-ти баков; ответ не изменится.

3. В треугольнике $ABC$ точка $K$ делит сторону $AB$ в отношении $1:2$, считая от точки $B$, точка $E$ делит сторону $BC$ в отношении $1:2$, считая от точки $C$. Пусть $G$ – точка пересечения отрезка $KE$ с медианой $AM$, проведенной из вершины $A$. В каком диапазоне может находиться отношение площади четырехугольника $MGKB$ к площади всего треугольника $ABC$?

**Решение.**

Пусть $CE = 2a$. Тогда $BE = 4a$, $CM = MB = 3a$, $EM = a$.




Найдем вклад треугольника $EKB$ в площадь всего треугольника $ABC$. Опустим высоты $AH$ и $KF$ на сторону $BC$. Из подобия треугольников $AHB$ и $KFB$ получаем

$$\frac{KF}{AH} = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Тогда отношение площадей составит

$$\frac{S_{EKB}}{S_{CAB}} = \frac{KF \cdot EB}{AH \cdot CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Проведем $KQ$ параллельно $AM$. По теореме Фалеса

$$\frac{BQ}{QM} = \frac{BK}{KA} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; BQ = a, MQ = 2a, \;\Rightarrow\; \frac{EG}{GK} = \frac{EM}{MQ} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, треугольники $EGM$ и $EKQ$ подобны с коэффициентом $1/3$, поэтому

$$S_{EGM} = \frac{1}{9} \cdot S_{EKQ} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot KF \cdot EQ = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} CB = \frac{1}{54} S_{CAB}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{MGKB}}{S_{CAB}} = \frac{S_{EKB} - S_{EGM}}{S_{CAB}} = \frac{2}{9} - \frac{1}{54} = \frac{11}{54}.$$

**Ответ:** только $11/54$.

4. В книге о вкусной и здоровой пище людоеда (Г. Остер) есть классический рецепт «Путаник в макаронах» и инновационый «Шалун в шоколаде». Людоед хочет два раза за неделю поесть «Путаника» и один раз «Шалуна». Сколькими разными способами он может выбрать дни для этих блюд, чтобы не есть «Путаника» и «Шалуна» в соседние дни?

**Решение.**

Рассмотрим отдельно два варианта выбора дня для «Шалуна».

Если «Шалун» стоит в понедельник, то двух «Путаников» можно ставить в любые пять дней со среды по воскресенье. Количество способов выбрать из этих пяти дней два равно $\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$. Такое же количество способов будет, если «Шалун» будет в воскресенье.

Если же «Шалун» стоит не в крайний день недели, то «Путаников» можно ставить в любые четыре дня (исключаются день Ш, а также предшествующий и последующий ему). Количество способов выбрать из этих четырех дней два равно $\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$.

Итого получается $10+10+6=26$ способов.

**Ответ:** 26.

5. Найдите все решения уравнения

$$1-1:(1-1:(1-1:(1-1:(x-2024))))=1+1:(1:0{,}2-1).$$

**Решение.**

Вычислим правую часть $1+1:(1:0{,}2-1)=1+\dfrac{1}{5-1}=\dfrac{5}{4}$ и выполним цепочку преобразований уравнения

$$1-1:(1-1:(1-1:(1-1:(x-2024))))=\frac{5}{4}$$

$$1:(1-1:(1-1:(1-1:(x-2024))))=-\frac{1}{4}$$

$$1-1:(1-1:(1-1:(x-2024)))=-4$$

$$1:(1-1:(1-1:(x-2024)))=5$$

$$1-1:(1-1:(x-2024))=\frac{1}{5}$$

$$1:(1-1:(x-2024))=\frac{4}{5}$$

$$1-1:(x-2024)=\frac{5}{4}$$

$$1:(x-2024)=-\frac{1}{4}$$

$$x-2024=-4$$

**Ответ:** $x=2020$.