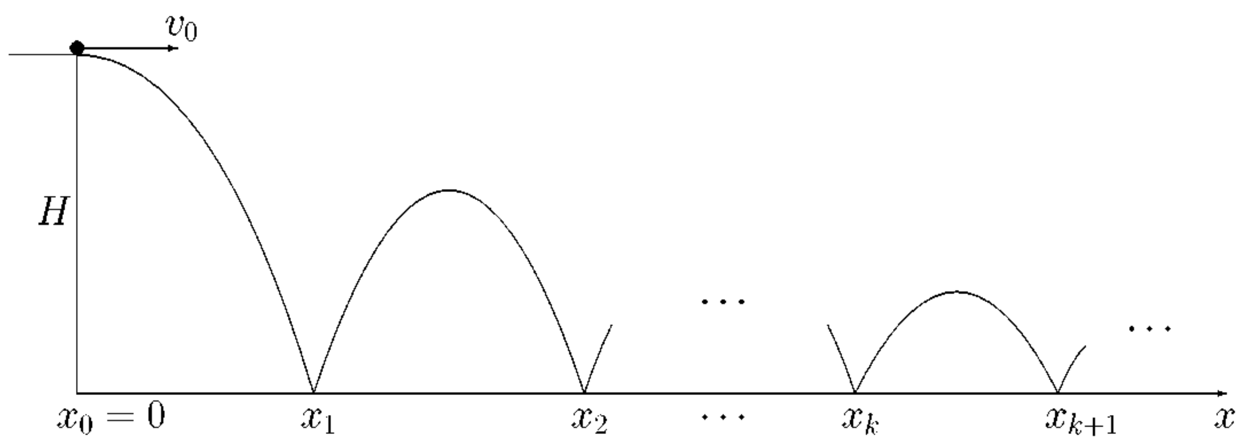
**Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап.**

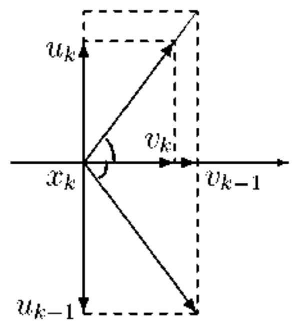
**Задание по компьютерному моделированию**

**ВАРИАНТЫ 41101 и 41111 для 10 и 11 классов**

## РЕШЕНИЕ.

Обозначим координаты точек, в которых происходят последовательные удары о поверхность (отскоки) через $x_k$. При этом начало движения считаем в точке $x_0 = 0$. Через $d_k$ обозначим расстояния между соседними точками отскоков ($d_k = x_k - x_{k-1}$), а через $v_k$ и $u_k$ – горизонтальную и вертикальную составляющие скорости отскока в точке $x_k$.




1. Рассмотрим сначала, что происходит при очередном ударе о поверхность. Если бы удар был абсолютно упругим, то (в силу равенства углов падения и отражения) сразу после удара составляющие скорости сохранили бы свои величины и, дополнительно, вертикальная сменила бы направление (см. рис). При неупругом ударе энергия уменьшится, следовательно скорость также уменьшится. Но поскольку направление отскока будет таким же, как и при абсолютно упругом ударе, то составляющие скорости должны измениться пропорционально, т.е. в одно и то же количество раз $c_k$:

$$u_{k+1} = c_k u_k, \qquad v_{k+1} = c_k v_k.$$

Если скорость изменяется в $c_k$ раз, то кинетическая энергия изменяется как

$$E_{k+1} = m \cdot \frac{(c_k v_k)^2 + (c_k u_k)^2}{2} = m \cdot c_k^2 \cdot \frac{v_k^2 + u_k^2}{2} = c_k^2 E_k.$$

Найдем отношение энергии после и до удара. Если до удара энергия была равна $E_{k-1}$, то после, согласно условию, она составит $E_k = E_{k-1} - Q$. Значит, коэффициент уменьшения энергии равен

$$\alpha_k = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 - \frac{Q}{E_{k-1}},$$

если $E_{k-1} \ge Q$. Если же $E_{k-1} < Q$, то вся энергия уйдет в тепло и движение прекратится. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

Так как при ударе полная энергия равна кинетической, то коэффициент уменьшения скорости будет равен $c_k = \sqrt{\alpha_k} = \sqrt{1 - \frac{Q}{E_{k-1}}}$,

2. Теперь рассмотрим движение между двумя последовательными ударами о поверхность в точках $x_k$ и $x_{k+1}$. Анализируя сначала движение только по вертикали, несложно найти время $t_k$ подъема на максимальную высоту. Из уравнения $0 = u_k - g\tau_k$ получаем

$$\tau_k = \frac{u_k}{g}.$$

Это время равно половине полного времени движения между отскоками. Поэтому расстояние, пройденное по горизонтали, равно

$$d_k = 2v_k\tau_k = \frac{2v_k u_k}{g}.$$

Заметим, что следующий скачок (т.е. движение между точками $x_{k+1}$ и $x_{k+2}$) будет описываться аналогичными формулами, а именно время подъема и длина скачка будут равны

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g}, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g}.$$

Пользуясь пропорциональностью составляющих скорости до и после удара, получаем отсюда

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g} = \frac{c_k u_k}{g} = c_k\tau_k, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g} = \frac{2c_k v_k c_k u_k}{g} = c_k^2 d_k.$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать время и длину каждый раз заново, а достаточно умножать предыдущую на коэффициент.

Поскольку время скачка $t_k = 2\tau_k$, то для него также справедлива полученная выше формула $t_{k+1} = c_k t_k$.

3. Перейдем к началу движения и найдем вертикальную составляющую скорости $v_0$, с которой объект первый раз ударился о поверхность. Ее несложно найти, например из закона сохранения полной энергии $mgH + \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m u_0^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2}$. Получаем

$$u_0 = \sqrt{2gH}.$$

Время начального скачка $t_0$ найдем из уравнения вертикального движения

$$H = \frac{g t_0^2}{2}.$$

Получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Теперь можно найти длину первого скачка. Она будет равна

$$d_0 = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Важно отметить, что первый скачок представляет собой только снижение, в то время как все остальные – сначала подъем, а затем снижение (т.е. первый скачок есть в некотором смысле «половина» полного скачка). Поэтому при расчете величин $t_1$ и $d_1$ по рекуррентным формулам, выведенным выше, их необходимо удвоить:

$$t_1 = 2c_0 t_0, \quad d_1 = 2c_0^2 d_0.$$

4. Осталось прояснить вопрос с условием остановки расчета, имеющим вид $E_{k-1} < Q$. Для этого достаточно найти входящую в него энергию. Она, очевидно, равна $E_{k-1} = m \cdot \frac{v_{k-1}^2 + u_{k-1}^2}{2}$.

Теперь можно писать

**алгоритм**

5. Сначала сформулируем алгоритм на естественном языке.

ДАНО: высота $H$, начальная скорость $v_0$, ускорение свободного падения $g$.
НАЙТИ: время движения $T$, пройденный путь $S$.
НАЧАЛО__АЛГОРИТМА

Найти время и длину начального скачка $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, $d_0 = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Присвоить эти значения переменным $T$ и $S$,

в которых будут накапливаться суммарное время и расстояние.

Найти вертикальную составляющую скорости перед первым ударом $u_0 = \sqrt{2gH}$.

Найти энергию перед первым ударом $E_0 = m \cdot \frac{v_0^2 + u_0^2}{2}$.

Инициализировать счетчик $k = 0$.

ПОКА ($E_k > 2$)

Увеличить счетчик $k = k + 1$.

Найти коэффициент уменьшения скорости $c = \sqrt{1 - \frac{Q}{E_{k-1}}}$.

Пересчитать скорость, время и расстояние следующего скачка:

$$v_k = c \cdot v_{k-1},\ u_k = c \cdot u_{k-1},\ t_k = c \cdot t_{k-1},\ d_k = c^2 \cdot d_{k-1}.$$

ЕСЛИ ($k = 1$) ТО удвоить величины $t_k = 2 \cdot t_k$, $d_k = 2 \cdot d_k$.

Пересчитать кинетическую энергию перед следующим ударом $E_k = c^2 \cdot E_{k-1}$

Увеличить время движения $T = T + t_k$.

Увеличить пройденное расстояние $S = S + d_k$.

КОНЕЦ_ПОКА

КОНЕЦ__АЛГОРИТМА

6. Теперь приведем алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

Предварительно заметим, что индекс $k$ (номер удара) можно не использовать у скоростей, времен и т.д. С точки зрения реализации алгоритма это означает, что можно обойтись простыми переменными для хранения только текущего значения данных параметров, а не массивами. (Фактически мы уже убрали индекс в коэффициенте $c$ ).

INPUT  $H, V_0, g$

OUTPUT  $T, S$

BEGIN

$u := \sqrt{2gH}$ ,   $v := V_0$

$t := \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ,   $d = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$

$T := t$ ,   $S := d$ ,   $E := m \cdot \frac{v^2 + u^2}{2}$

$k := 0$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k + 1$.

$c := \sqrt{1 - \frac{Q}{E}}$ .

$v = c \cdot v$ ,   $u = c \cdot u$ ,   $t = c \cdot t$ ,   $d = c^2 \cdot d$ .

IF  $k = 1$  THEN

BEGIN   $t = 2 \cdot t$ ,  $d = 2 \cdot d$   END

$E = c^2 \cdot E$

$T = T + t$

$S = S + d$

END

RETURN  T, S

END

7. Приведем еще один вариант алгоритма (на том же псевдокоде) с другой организацией расчетов. В нем характеристики каждого скачка вычисляются не по рекуррентным соотношениям, а по непосредственным формулам.

```
INPUT   H, g, V0
OUTPUT   T, S
BEGIN
        u := √(2gH) ,     v := V_0
        t := √(2H/g) ,       d = v√(2H/g)
        T := t ,       S := d
        E := m·(v^2 + u^2)/2
        k := 0
        WHILE  E > 2
        BEGIN
                k := k + 1 .
                c := √(1 − Q/E) .
                v = c·v ,     u = c·u ,
                IF  k = 1  THEN   BEGIN     t = 2·t ,  d = 2·d     END
                T = T + 2u/g
                S = S + 2vu/g
                E := m·(v^2 + u^2)/2
        END
        RETURN   T,  S
END
```

$$u := \sqrt{2gH}, \quad v := V_0$$

$$t := \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad d = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$T := t, \quad S := d$$

$$E := m \cdot \frac{v^2 + u^2}{2}$$

$$k := 0$$

$$k := k + 1.$$

$$c := \sqrt{1 - \frac{Q}{E}}.$$

$$v = c \cdot v, \quad u = c \cdot u,$$

$$t = 2 \cdot t, \quad d = 2 \cdot d$$

$$T = T + \frac{2u}{g}$$

$$S = S + \frac{2vu}{g}$$

$$E := m \cdot \frac{v^2 + u^2}{2}$$

В таком варианте алгоритма нет необходимости выводить рекуррентные соотношения (описанные в п. 2), что упрощает подготовительную часть. Однако общий объем вычислительной работы при выполнении алгоритма получается больше.

8. Напоследок заметим, что если вынести первый проход (при $k = 1$) из цикла и описать его отдельно перед началом цикла, то можно не вводить счетчик $k = 1$, т.к. более

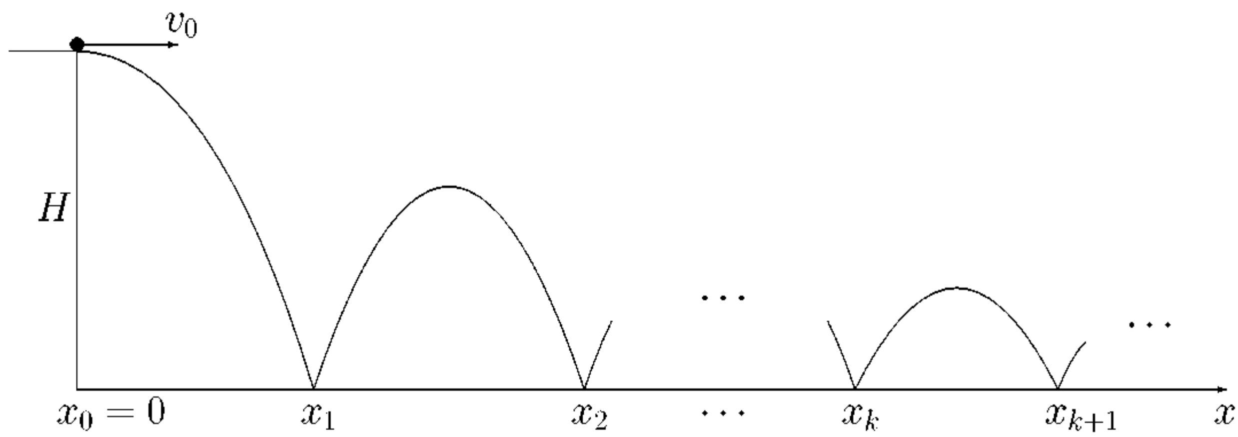
он нигде не используется. Кроме того, экономится одна операция сравнения на каждом повторе цикла.

**Ответ.**

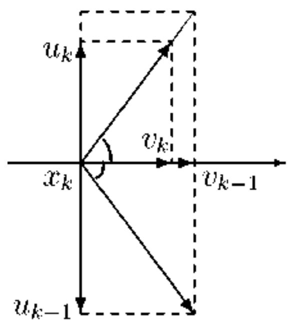
1. 12,04 м; 11,3 м.
2. 15,49 с; 111,24 м; 17 скачков.
3. 4,34 м.

## РЕШЕНИЕ.

Обозначим координаты точек, в которых происходят последовательные удары о поверхность (отскоки) через $x_k$. При этом начало движения считаем в точке $x_0 = 0$. Через $d_k$ обозначим расстояния между соседними точками отскоков ($d_k = x_k - x_{k-1}$), а через $v_k$ и $u_k$ – горизонтальную и вертикальную составляющие скорости отскока в точке $x_k$.




1. Рассмотрим сначала, что происходит при очередном ударе о поверхность. Если бы удар был абсолютно упругим, то (в силу равенства углов падения и отражения) сразу после удара составляющие скорости сохранили бы свои величины и, дополнительно, вертикальная сменила бы направление (см. рис). При неупругом ударе энергия уменьшится, следовательно скорость также уменьшится. Но поскольку направление отскока будет таким же, как и при абсолютно упругом ударе, то составляющие скорости должны измениться пропорционально, т.е. в одно и то же количество раз $c_k$:




$$u_{k+1} = c_k u_k, \qquad v_{k+1} = c_k v_k.$$

Если скорость изменяется в $c_k$ раз, то кинетическая энергия изменяется как

$$E_{k+1} = m \cdot \frac{(c_k v_k)^2 + (c_k u_k)^2}{2} = m \cdot c_k^2 \cdot \frac{v_k^2 + u_k^2}{2} = c_k^2 E_k.$$

Найдем отношение энергии после и до удара. Если до удара энергия была равна $E_{k-1}$, то после, согласно условию, она составит $E_k = E_{k-1} - Q$. Значит, коэффициент уменьшения энергии равен

$$\alpha_k = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 - \frac{Q}{E_{k-1}},$$

если $E_{k-1} \ge Q$. Если же $E_{k-1} < Q$, то вся энергия уйдет в тепло и движение прекратится. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

Так как при ударе полная энергия равна кинетической, то коэффициент уменьшения скорости будет равен $c_k = \sqrt{\alpha_k} = \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E_{k-1}}}$,

2. Теперь рассмотрим движение между двумя последовательными ударами о поверхность в точках $x_k$ и $x_{k+1}$. Анализируя сначала движение только по вертикали, несложно найти время $t_k$ подъема на максимальную высоту. Из уравнения $0 = u_k - g\tau_k$ получаем

$$\tau_k = \frac{u_k}{g}.$$

Это время равно половине полного времени движения между отскоками. Поэтому расстояние, пройденное по горизонтали, равно

$$d_k = 2v_k\tau_k = \frac{2v_k u_k}{g}.$$

Заметим, что следующий скачок (т.е. движение между точками $x_{k+1}$ и $x_{k+2}$) будет описываться аналогичными формулами, а именно время подъема и длина скачка будут равны

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g}, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g}.$$

Пользуясь пропорциональностью составляющих скорости до и после удара, получаем отсюда

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g} = \frac{c_k u_k}{g} = c_k\tau_k, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g} = \frac{2c_k v_k c_k u_k}{g} = c_k^2 d_k.$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать время и длину каждый раз заново, а достаточно умножать предыдущую на коэффициент.

Поскольку время скачка $t_k = 2\tau_k$, то для него также справедлива полученная выше формула $t_{k+1} = c_k t_k$.

3. Перейдем к началу движения и найдем вертикальную составляющую скорости $v_0$, с которой объект первый раз ударился о поверхность. Ее несложно найти, например из закона сохранения полной энергии $mgH + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2}$. Получаем

$$u_0 = \sqrt{2gH}\ .$$

Время начального скачка $t_0$ найдем из уравнения вертикального движения

$$H = \frac{g\,t_0^2}{2}\ .$$

Получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Теперь можно найти длину первого скачка. Она будет равна

$$d_0 = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Важно отметить, что первый скачок представляет собой только снижение, в то время как все остальные – сначала подъем, а затем снижение (т.е. первый скачок есть в некотором смысле «половина» полного скачка). Поэтому при расчете величин $t_1$ и $d_1$ по рекуррентным формулам, выведенным выше, их необходимо удвоить:

$$t_1 = 2c_0 t_0\,, \quad d_1 = 2c_0^2 d_0\,.$$

4. Осталось прояснить вопрос с условием остановки расчета, имеющим вид $E_{k-1} < Q$. Для этого достаточно найти входящую в него энергию. Она, очевидно, равна $E_{k-1} = m \cdot \frac{v_{k-1}^2 + u_{k-1}^2}{2}$.

Теперь можно писать

**алгоритм**

5. Сначала сформулируем алгоритм на естественном языке.

ДАНО: высота $H$, начальная скорость $v_0$, ускорение свободного падения $g$.
НАЙТИ: время движения $T$, пройденный путь $S$.
НАЧАЛО__АЛГОРИТМА

Найти время и длину начального скачка $t_0 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, $d_0 = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Присвоить эти значения переменным $T$ и $S$,

в которых будут накапливаться суммарное время и расстояние.

Найти вертикальную составляющую скорости перед первым ударом $u_0 = \sqrt{2gH}$.

Найти энергию перед первым ударом $E_0 = m \cdot \dfrac{v_0^2 + u_0^2}{2}$.

Инициализировать счетчик $k = 0$.

ПОКА ( $E_k > 2$ )

Увеличить счетчик $k = k + 1$.

Найти коэффициент уменьшения скорости $c = \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E_{k-1}}}$.

Пересчитать скорость, время и расстояние следующего скачка:

$$v_k = c \cdot v_{k-1},\ u_k = c \cdot u_{k-1},\ t_k = c \cdot t_{k-1},\ \ d_k = c^2 \cdot d_{k-1}.$$

ЕСЛИ ( $k = 1$ ) ТО удвоить величины $t_k = 2 \cdot t_k$, $d_k = 2 \cdot d_k$.

Пересчитать кинетическую энергию перед следующим ударом $E_k = c^2 \cdot E_{k-1}$

Увеличить время движения $T = T + t_k$.

Увеличить пройденное расстояние $S = S + d_k$.

КОНЕЦ_ПОКА

КОНЕЦ__АЛГОРИТМА

6. Теперь приведем алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

Предварительно заметим, что индекс $k$ (номер удара) можно не использовать у скоростей, времен и т.д. С точки зрения реализации алгоритма это означает, что можно обойтись простыми переменными для хранения только текущего значения данных параметров, а не массивами. (Фактически мы уже убрали индекс в коэффициенте $c$ ).

INPUT $H, V_0, g$

OUTPUT $T, S$

BEGIN

$u := \sqrt{2gH}$ , $v := V_0$

$t := \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ , $d = v\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

$T := t$ , $S := d$ , $E := m \cdot \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

$k := 0$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k + 1$ .

$c := \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E}}$ .

$v = c \cdot v$ , $u = c \cdot u$ , $t = c \cdot t$ , $d = c^2 \cdot d$ .

IF $k = 1$ THEN

BEGIN $t = 2 \cdot t$ , $d = 2 \cdot d$ END

$E = c^2 \cdot E$

$T = T + t$

$S = S + d$

END

RETURN T, S

END

7. Приведем еще один вариант алгоритма (на том же псевдокоде) с другой организацией расчетов. В нем характеристики каждого скачка вычисляются не по рекуррентным соотношениям, а по непосредственным формулам.

```
INPUT   H, g, V0
OUTPUT   T, S
BEGIN
```

$u := \sqrt{2gH}\,, \quad v := V_0$

$t := \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\,, \quad d = v\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

$T := t\,, \quad S := d$

$E := m \cdot \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

$k := 0$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k + 1\,.$

$c := \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E}}\,.$

$v = c \cdot v\,, \quad u = c \cdot u\,,$

IF $k = 1$ THEN BEGIN $t = 2 \cdot t\,,\ d = 2 \cdot d$ END

$T = T + \dfrac{2u}{g}$

$S = S + \dfrac{2vu}{g}$

$E := m \cdot \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

END

RETURN T, S

END

В таком варианте алгоритма нет необходимости выводить рекуррентные соотношения (описанные в п. 2), что упрощает подготовительную часть. Однако общий объем вычислительной работы при выполнении алгоритма получается больше.

8. Напоследок заметим, что если вынести первый проход (при $k = 1$) из цикла и описать его отдельно перед началом цикла, то можно не вводить счетчик $k = 1$, т.к. более

он нигде не используется. Кроме того, экономится одна операция сравнения на каждом повторе цикла.

**Ответ.**

1. 12,04 м; 11,3 м.
2. 15,49 с; 111,24 м; 17 скачков.
3. 4,34 м.