

**Олимпиада школьников СПбГУ «Инженерные системы»
по комплексу предметов
(математика, информатика, физика и химия)**

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий заключительного этапа
2023/2024 учебный год

10-11 классы

Задача 1

- а) Найдите хотя бы одну пару натуральных чисел x и y для которых выполняются следующие условия: $2023^2 \leq x \leq y \leq 2024^2$ и сумма квадратов этих чисел $x^2 + y^2$ делится на $2023^2 + 1$.
- б) Предложите алгоритм (или напишите программу), который позволяет находить все возможные пары таких чисел, но не осуществляет простой полный перебор всех чисел из диапазона $[2023^2; 2024^2]$.

Задача 2

Вариант 1.

Катер перевозит пассажиров между двумя пристанями на озере, находящимися на расстоянии 12 км друг от друга. Пусть скорость катера без пассажиров равна 10 км/ч, а если он везет N пассажиров, то его скорость составляет 98 % от скорости катера с $N - 1$ пассажиром на борту. В течение дня катер сделал пять рейсов туда и пять обратно, перевозя при этом 21, 6, 9, 15, 24, 12, 18, 27 и 3 пассажира, а последний обратный рейс совершил без пассажиров. Найдите среднюю скорость катера за все время движения между пристанями, включая в это время также и время, которое требуется для посадки и высадки пассажиров. Принять, что на посадку одного пассажира уходит одна минута, а на его высадку — полминуты.

Вариант 2.

Катер перевозит пассажиров между двумя пристанями на озере, находящимися на расстоянии 10 км друг от друга. Пусть скорость катера без пассажиров равна 8 км/ч, а если он везет N пассажиров, то его скорость составляет 99 % от скорости катера с $N - 1$ пассажиром на борту. В течение дня катер сделал четыре рейса туда и четыре обратно, перевозя при этом 10, 5, 25, 15, 30, 35 и 20 пассажиров, а последний обратный рейс совершил без пассажиров. Найдите среднюю скорость катера за все время движения между пристанями, включая в это время также и время, которое требуется для посадки и высадки пассажиров. Принять, что на посадку одного пассажира уходит одна минута, а на его высадку — полминуты.

Задача 3

Вариант 1.

Дана катушка с $N = 200$ витками и площадью витка $A = 0,02 \text{ м}^2$, которая размещена рядом с мощным магнитом на энергетической установке. Катушка имеет сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$, индуктивность $L = 0,1 \text{ Гн}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 50 \text{ рад/с}$ в магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$.

- 1) Вычислите полное сопротивление Z катушки, учитывая как ее сопротивление, так и индуктивность.
- 2) Определите ток I , текущий через катушку как функцию времени.
- 3) Напишите программный код на Python (или на любом другом языке, например, Pascal, C или C++) для построения графиков как индуцированной ЭДС, так и тока в зависимости от времени.

Вариант 2.

Катушка с $N = 150$ витками и площадью витка $A = 0,01 \text{ м}^2$ помещена в переменное магнитное поле, создаваемое соленоидом. Катушка имеет сопротивление $R = 8 \text{ Ом}$ и индуктивность $L = 0,15 \text{ Гн}$. Индукция магнитного поля изменяется со временем по закону $B(t) = B_0 \cdot \sin(\omega t)$, где $B_0 = 0,4 \text{ Тл}$ и $\omega = 30 \text{ рад/с}$.

- 1) Выразите индуцированную ЭДС $\varepsilon(t)$ в катушке в зависимости от времени, учитывая изменение магнитного поля.
- 2) Определите полное сопротивление $Z(t)$ катушки как функцию времени.
- 3) Напишите программный код на Python (или на любом другом языке, например Pascal, C или C++) для построения графиков как индуцированной ЭДС, так и тока в зависимости от времени.

Задача 4

Вариант 1

Цивилизация в соседней галактике собирается отправить межпланетную экспедицию, используя для поддержания работы оборудования на своих кораблях энергию, выделяющуюся в химических реакциях. Из недр своей планеты они научились добывать карбонил железа $\text{Fe}(\text{CO})_5$ и решили использовать его в качестве источника энергии. Инженерам нужно выбрать между двумя вариантами:

1. брать на борт карбонил железа и использовать энергию реакций окисления карбонила до углекислоты и высшего оксида металла В;
2. брать на борт только газообразный продукт D реакции разложения карбонила железа и использовать только энергию его окисления.

Оцените, какой из этих вариантов предпочтительнее и во сколько раз, если рассматривать их с точки зрения удельной энергии на массу реагентов, которые расходуются в ходе реакций. Используйте значения энтальпий образования:

$$\Delta H_{f\text{CO}_2}^0 = -393 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{f\text{Fe}(\text{CO})_5}^0 = -766 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{f\text{B}}^0 = -824 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{f\text{D}}^0 = -110 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{f\text{CO}_2}^0 = -393 \text{ кДж/моль}.$$

Вариант 2

Цивилизация в соседней галактике собирается отправить межпланетную экспедицию, используя для поддержания работы оборудования на своих

кораблях энергию, выделяющуюся в химических реакциях. Инженерам нужно выбрать между двумя вариантами:

1. использовать кислород и карбид А, массовая доля углерода в котором $\omega_C = 0.375$;
2. использовать только газообразный продукт В, получающийся в реакции карбида А с водой, и кислород, а твердый продукт D, получающийся в той же реакции карбида с водой, оставить на планете.

Известно, что вещество D способно образовывать среднюю соль E с углекислотой — цивилизации было известно, что энтальпия образования средних солей меньше, чем кислых, поэтому они решили использовать реакцию с получением средней соли. Считаем, что имеется возможность полностью использовать энергию любой реакции и использовать продукты реакции в качестве исходных для проведения новых реакций.

Оцените, какой из этих вариантов эффективнее и во сколько раз, если рассматривать их с точки зрения удельной энергии на массу реагентов, которые расходуются в ходе реакций. Используйте значения энтальпий образования:

$$\Delta H_{fA}^o = -58.9 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fH_2O}^o = -286 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{fD}^o = -985 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fE}^o = -1207 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{fB}^o = 227 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fCO_2}^o = -393 \text{ кДж/моль}.$$

Задача 5

Вариант 1.

Для определения вида кинетического уравнения реакции взаимодействия веществ А и В было проведено три эксперимента, в которых варьировали концентрации веществ и измеряли скорость реакции.

В первом эксперименте при концентрации веществ А и В равным 0,2 моль/л и 0,1 моль/л соответственно, скорость реакции составила 2,524 моль/(л · с). Во втором эксперименте концентрацию вещества А увеличили в полтора раза, а концентрацию вещества В оставили прежней; скорость реакции при этом тоже возросла тоже в полтора раза. В третьем эксперименте концентрацию А увеличили в два раза относительно первого эксперимента, а концентрацию В — в три раза. Скорость реакции при этом составила 18,864 моль/(л · с).

1. Запишите кинетическое уравнение для описанной реакции;
2. Чему равен общий порядок реакции?
3. Рассчитайте, чему равна скорость этой реакции, если концентрации **A** и **B** будут составлять 0,25 и 0,5 моль/л соответственно.

Вариант 2.

Для определения вида кинетического уравнения реакции взаимодействия веществ **A** и **B** было проведено три эксперимента, в которых варьировали концентрации веществ и измеряли скорость реакции.

В первом эксперименте при одинаковых концентрациях веществ **A** и **B** равных 0,1 моль/л скорость реакции составила $1,23 \cdot 10^{-3}$ моль/(л · с). Во втором эксперименте концентрацию вещества **B** увеличили в два раза, а концентрацию вещества **A** оставили прежней; скорость при этом возросла в два раза. В третьем эксперименте концентрацию **A** увеличили в три раза относительно первого эксперимента, а концентрация **B** была, как в первом эксперименте. Скорость реакции при этом относительно первого эксперимента возросла в 4 раза.

1. Запишите кинетическое уравнение для описанной реакции.
2. Чему равен общий порядок реакции?
3. Рассчитайте, чему равна скорость рассматриваемой реакции, если концентрации **A** и **B** будут составлять 0,25 и 0,5 моль/л соответственно.