МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Решите в целых числах уравнение

$$y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0.$$

Ответ: $\mathbf{(15;2), (10;-3), (-2;1), (-5;-2)}$**.**

Решение: Выразим из этого уравнения x:

$$x=\frac{y^3+2y^2-4y+7}{y^2+y-5}=y+1+\frac{12}{y^2+y-5}.$$

Следовательно, число y^2+y-5 является делителем числа 12 и при этом $x,y\in\mathbb{Z}$.
Для числа 12 делителями являются числа $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$, но условиям, что $x,y\in\mathbb{Z}$ в итоге будут удовлетворять:

$$\left[\begin{array}{l} y^2+y-5=1, \\ y^2+y-5=-3. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+y-6=0, \\ y^2+y-2=0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2, y=-3, \\ y=1, y=-2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=15, x=10, \\ x=-2, x=-5. \end{array}\right.$$

2. Для некоторого x выполняются равенства

$$\cos 3x=\mathrm{A}\cdot\sin 2x \quad \text{и} \quad \sin 3x=\mathrm{B}\cdot\cos 4x\,,$$

где A и B – рациональные числа.

Докажите, что $\sin 3x$ также является рациональным числом.

Доказательство: Перемножив равенства, получим

$$\cos 3x\cdot\sin 3x=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\ \sin 2x\cdot\cos 4x, \text{ то есть}$$

$$\tfrac{1}{2}\sin 6x=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\ \sin 2x\cdot\cos 4x.$$

Преобразуем левую часть и приравняем к правой части:

$$\frac{1}{2}\sin 6x=\frac{1}{2}(3\sin 2x-4\sin^3 2x)=\frac{1}{2}\sin 2x\,(3-4\sin^2 2x)=\frac{1}{2}\sin 2x\,(1+2\cos 4x)=$$
$$=A\cdot\mathrm{B}\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x.$$

Если $\sin 2x=0$, то $\cos 4x=1$. Следовательно, $\sin 3x=\mathrm{B}$ – рациональное число.

Если $\sin 2x\neq 0$, то $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}-1)\cos 4x=0{,}5$. Тогда $\cos 4x=\frac{1}{2(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}-1)}$ при $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\neq 1$.

Следовательно, $\sin 3x=\frac{\mathrm{B}}{2(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}-1)}$ – рациональное число.

3. Докажите, что для любых положительных чисел $a,\ b,\ c$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}\geq\frac{3}{2}.$$

Доказательство: Прибавив к обеим частям неравенства число 3, получим

$$\left(\frac{a+b-c}{2c}+1\right)+\left(\frac{b+c-a}{2a}+1\right)+\left(\frac{a+c-b}{2b}+1\right)\geq\frac{9}{2}.$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Используя, неравенство о средних $\begin{cases} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}, \end{cases}$ получим

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = 9.$$

4. Докажите, что для корней x_1, x_2 многочлена $x^2+px-\frac{1}{2p^2}$ и любого ненулевого значения p выполняется неравенство $x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$.

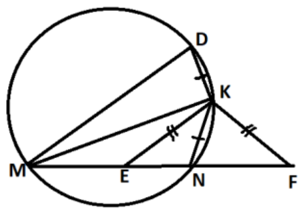
Доказательство: Используя теорему Виета $x_1+,x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2p^2}$ и неравенство о средних, получим

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1+x_2)^4 - 2x_1x_2(2(x_1+x_2)^2 - x_1x_2) = p^4+\frac{1}{p^2}\left(2p^2+\frac{1}{2p^2}\right) = p^4+\frac{1}{2p^4}+2 \geq$$

$$\geq 2\sqrt{p^4\cdot\frac{1}{2p^4}}+2 = \sqrt{2}+2.$$

5. Треугольник MNK вписан в окружность радиуса R. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла K пересекают прямую MN в точках E и F соответственно, при этом $KE=KF$. Докажите, что $MK^2+NK^2=4R^2$.

Решение:



Пусть точки M, E, N, F на прямой MN расположены в указанном порядке (случай расположения F, M, E, N рассматривается аналогично), тогда $\angle EKF = 90°$ и $\angle KEF = 45°$. Поэтому

$$2\angle NMK + \angle NKM = 2(\angle EMK + \angle EKM) = 2\angle KEF = 90°.$$

$\angle NMK + \angle NKM = 180° - \angle MNK \Rightarrow \angle NMK = \angle MNK - 90°$. Так как угол $MNK-$ тупой, то центр описанной окружности лежит вне этого треугольника. Пусть $MD-$ диаметр этой окружности. Тогда

$\angle DMK = (180° - \angle MDK) - \angle MKD = \angle MNK - 90° = \angle NMK,$

так как $\angle MNK$ *и* $\angle MDK -$ противоположные углы вписанного четырехугольника $MNKD$. Поэтому $DK = NK$ и $4R^2 = MD^2 = MK^2 + KD^2 = MK^2 + NK^2$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35.
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.