МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0.$$

Ответ: $\mathbf{(1;5;0),(-1;5;0),(1;1;0),(-1;1;0)}$**.**

Решение: Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7(y-3)^2 = 30.$$

Возможны 3 случая:

1) $|y-3| = 0$, 2) $|y-3| = 1$, 3) $|y-3| = 2$

В первом случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 30$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 31$. Перебирая положительные множители числа 31, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

Во втором случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 23$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 24$. Перебирая положительные множители числа 24, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

В третьем случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 2$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 3$. Перебирая положительные множители числа 3, приходим к решениям:

1) $x = 1, z = 0$; 2) $x = -1, z = 0$.

Вспоминаем, что в этом случае $|y-3| = 2$, а следовательно, $y = 5, y = 1$.

Таким образом, получаем 4 решения: $(1;5;0),(-1;5;0),(1;1;0),(-1;1;0)$.

2. Найдите количество корней уравнения: $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$.

Ответ: 4 корня.

Решение: Используя свойство логарифмов, перепишем уравнения в следующем виде

$$(x^2-2023)^{\lg 2} - \lg 2^{x^2-2022} = 0.$$

Введем обозначения $z = x^2 - 2023$, $a = \lg 2$, при этом $z > 0$, $a \in (0,1)$. Тогда

$$z^a = (z+1)a.$$

Пусть $y_1(z) = z^a$, $y_2(z) = (z+1)a$.

Так как $y_1(1) = 1, y_2(1) = 2a$, причем $y_1(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\lg 2 = 2a$ и учитывая монотонность и выпуклость функций $y_1(z)$, $y_2(z)$ для $a \in (0,1)$, получаем, что уравнение $z^a = (z+1)a$ имеет два корня z_1 и z_2 , один из которых, например z_1 меньше единицы, но больше нуля, а другой корень z_2 будет больше единицы. Тогда, вспоминая замену $z = x^2 - 2023$ и возвращаясь к исходной переменной x, приходим к выводу, что исходное уравнение будет иметь 4 корня: $\pm\sqrt{z_1 + 2023}, \pm\sqrt{z_2 + 2023}$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1.$$

Доказательство: Прибавив к обеим частям неравенства число 2, получим

$$\left(\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2c}{3(a+b)}+\frac{2}{3}\right)\ge 3.$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9.$$

$$\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9.$$

Используя, неравенство о средних

$$\begin{cases}(b+c)+(a+c)+(a+b)\ge 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)},\\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{1}{a+c}\cdot\dfrac{1}{a+b}},\end{cases}$$

получим

$$\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{a+c}\cdot\frac{1}{a+b}}=9.$$

4. Докажите, что для корней x_1, x_2, x_3 многочлена ax^3-ax^2+bx+b с ненулевыми коэффициентами a и b справедливо равенство $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1$.

Доказательство: По теореме Виета имеем равенства

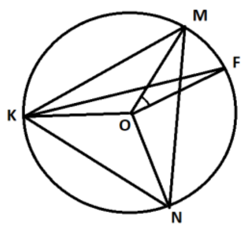
$$x_1+x_2+x_3=1,\;\; x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{b}{a},\quad x_1x_2x_3=-\frac{b}{a}.$$

Тогда

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}=1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1.$$

5. Равносторонний треугольник MNK вписан в окружность. На этой окружности взята точка F. Докажите, что величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F.

Решение:



Без ограничения общности можно считать, что точка М лежит на дуге MN описанной окружности с центром O и радиусом R. Обозначим $\angle MOF=\alpha$. Тогда

$$FM=2R\sin(\alpha/2),\;\; FN=2R\sin((\angle MON-MOF)/2)=2R\sin(60^\circ-\alpha/2),$$
$$FK=2R\sin((\angle MOK+MOF)/2)=2R\sin(60^\circ+\alpha/2).$$

Покажем, что величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F. Найдем

$$\frac{FM^4+FN^4+FK^4}{R^4}=16\big(\sin^4(\alpha/2)+\sin^4(60^\circ-\alpha/2)+\sin^4(60^\circ+\alpha/2)\big)=$$
$$=4((1-\cos\alpha)^2+(1-\cos(120^\circ-\alpha))^2+(1-\cos(120^\circ+\alpha))^2)=$$
$$=12-8\cos\alpha-16\cos\alpha\cos120^\circ+2((1-\cos 2\alpha)+(1-\cos(240^\circ-2\alpha)+(1-\cos(240^\circ+2\alpha))=$$
$$=12-8\cos\alpha+8\cos\alpha+6-2\cos 2\alpha-4\cos 2\alpha\cos 240^\circ=18.$$

Следовательно, величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35.
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.