МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Решите в целых числах уравнение

$$2y^2 - 2xy + x + 9y - 2 = 0.$$

Ответ: $\mathbf{(9;1), (2;0), (8;2), (3;-1).}$

Решение: Выразим из этого уравнения x:

$$x = \frac{2y^2 + 9y - 2}{2y - 1} = y + 5 + \frac{3}{2y - 1}.$$

Следовательно, число $2y - 1$ является делителем числа 3:

$$\left[\begin{array}{l} 2y-1=1, \\ 2y-1=-1, \\ 2y-1=3, \\ 2y-1=-3. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=0, \\ y=2, \\ y=-1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=2, \\ x=8, \\ x=3. \end{array}\right.$$

2. Маша и Ваня нашли по дороге по пачке 11–рублевок и решили отправиться в магазин. В магазине Ваня купил 3 шоколадки, 4 газировки и 5 пачек печенья. Маша купила 9 шоколадок, 1 газировку и 4 пачки печенья. Шоколадка, газировка и пачка печенья стоят по целому числу рублей. Ваня смог расплатиться 11–рублевками без сдачи. Смогла ли Маша рассчитаться 11–рублевками без сдачи? Ответ объясните.

Ответ: да, смогла.

Решение: Введем следующие переменные: $\boldsymbol{m}$– стоимость $\mathbf{1}$ шоколадки, $\boldsymbol{n}$– стоимость $\mathbf{1}$ газировки, $\boldsymbol{k}$– стоимость $\mathbf{1}$ пачки печенья.

Так как Ваня смог расплатиться 11–рублевками без сдачи, то

$$3m + 4n + 5k = 11p, \quad p \in Z.$$

Для того, чтобы Маша смогла рассчитаться 11–рублевками без сдачи, сумма

$$9m + n + 4k$$

должна быть кратна 11.

Выразим из первого уравнения $3m$ и подставим во второе выражение:

$$9m + n + 4k = 3(11p - 4n - 5k) + n + 4k = 33p - 11n - 11k = 11(3p - n - k).$$

Значит, сумма, потраченная Машей кратна 11.

Следовательно, Маша смогла рассчитаться 11–рублевками без сдачи.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{a \cdot c^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{a \cdot b}\,.$$

Доказательство: Используя неравенство о средних, получим:

$$\frac{a \cdot c^2 + b}{c} = ac + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ac \cdot \frac{b}{c}} \geq 2\sqrt{a \cdot b}\,.$$

4. Докажите, что при любых p и q хотя бы один из двух трехчленов

$$x^2 - 2px + pq\,, \quad x^2 - 2qx + pq$$

имеет корень.

Доказательство: Воспользуемся методом от противного.

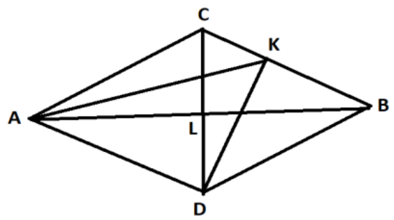
Пусть оба трехчлена не имеет корней. Тогда их дискриминанты отрицательны:

$$4p^2 - 4pq < 0, \qquad 4q^2 - 4pq < 0.$$

Складывая эти неравенства, получаем, что $4(p-q)^2 < 0$. Получили противоречие.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведены биссектрисы CL и AK. Найдите $\angle ACB$ треугольника ABC, если известно, что $AK = 2CL$.
Ответ: 108°

Решение:



1. Достроим треугольник до ромба $ABCD$, причем $H \in CD$, так как CL‒ биссектриса и медиана (треугольник ABC ‒ равнобедренный).
2. Трапеция $ACKD$ является равнобокой, так как диагонали ее равны из-за того, что $AK = 2CL$.
3. Треугольники ACK и DKC равны по трем сторонам. Следовательно, равны и соответствующие углы.
4. Пусть угол CAK равен α, тогда угол CDK тоже равен α.
5. Так как AK ‒ биссектриса, то $\angle CAB = 2\alpha$. Тогда угол $\angle CAD = 4\alpha$ и $\angle ACB = \angle CKD = 180° - 4\alpha$, $\angle DCK = \frac{180°-4\alpha}{2} = 90° - 2\alpha$.
6. По теореме о сумме углов треугольника относительно треугольника DKC имеем

$$\alpha + 180° - 4\alpha + 90° - 2\alpha = 180°.$$

$$\alpha = 18°.$$

Следовательно, $\angle ACB = \angle CKD = 180° - 4\alpha = 180° - 4 \cdot 18° = 108°$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35.
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.