МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0.$$

Ответ: $\mathbf{(1; 6), (14; 13).}$

Решение: Исходное уравнение представим в виде

$$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 12 = 72.$$

Далее левую часть уравнения раскладываем на множители с помощью дискриминанта:

$$(x + 2y - 4)(y - x + 3) = 72.$$

Так как $72 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, то следует сократить перебор.

Обозначим $x + 2y - 4 = a,\ y - x + 3 = b$. Тогда $a \cdot b = 72$ и $y = \frac{a+b+1}{3}$ и $y \in \mathbb{N}$.

Следовательно, a и b не могут быть отрицательными и каждое из них не должно делиться на 3, но одно из них должно делиться на 9. Таким образом, сократили перебор до вариантов:

1) $\begin{cases} a = 9, \\ b = 8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = 8, \\ b = 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a = 18, \\ b = 4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a = 4, \\ b = 18. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a = 36, \\ b = 2. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a = 2, \\ b = 36. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} a = 72, \\ b = 1. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a = 1, \\ b = 72. \end{cases}$

Учитывая $y = \frac{a+b+1}{3}$, $y \in \mathbb{N}$ получаем, что подходит всего два варианта:

1) $\begin{cases} a = 9, \\ b = 8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = 36, \\ b = 2. \end{cases}$

Отсюда получаем два решения: $\mathbf{(1; 6), (14; 13).}$

2. Дана последовательность $x_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Возможно ли найти в этой последовательности пять идущих подряд членов, каждый из которых будет делиться на 2025? Ответ объясните.

Ответ: нет, не существует.

Решение: Докажем, что при $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ член последовательности с номером n не делится на 5. Найдем

$$x_{4k} = 1 + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} + 5^{4k} = 1 + 16^k + 81^k + 256^k + 625^k.$$

Числа $16^k,\ 81^k, 256^k$ представимы в виде $(5m + 1)^k$,следовательно имеют остаток от деления на 5 равный 1. Число 625^k делится на 5 без остатка. Следовательно, член последовательности x_{4k} дает при делении на 5 остаток 4. Таким образом, x_{4k} не делится 5, а следовательно, и на 2025. Значит, не существует пять идущих подряд членов, каждый из которых будет делиться на 2025.

3. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a,\ b,\ c$ выполняется неравенство

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \le 3(a + b + c).$$

Доказательство:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \le 3(a + b + c).$$

$$a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} \le 3(a + b + c).$$

$$2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ac} \ge 0.$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b + b - 2\sqrt{bc} + c + c - 2\sqrt{ac} + a \ge 0.$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \ge 0.$$

4. Докажите, что для корней x_1, x_2 многочлена x^2+p_1x+1 и корней $x_3,\ x_4$ многочлена x^2+p_2x+1 справедливо равенство

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)=p_2^2-p_1^2.$$

Доказательство: По теореме Виета имеем равенства

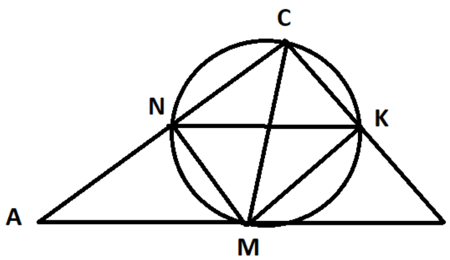
$$x_1+x_2=-p_1,\ \ x_1\cdot x_2=1,\ x_3+x_4=-p_2,\ \ x_3\cdot x_4=1.$$

Тогда

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)=(\ x_1x_2-(\ x_1+x_2)x_3+{x_3}^2)(\ x_1x_2+(\ x_1+x_2)x_4+{x_4}^2)=$$
$$=(1+p_1x_3+{x_3}^2)(1-p_1x_4+{x_4}^2)=({x_3}^2+1+{x_3}^2{x_4}^2+{x_4}^2)+p_1(\ x_3-x_4-\ x_4{x_3}^2+x_3{x_4}^2)-$$
$$-{p_1}^2x_3x_4=(x_3+x_4)^2+p_1(x_3-x_4)(1-x_3x_4)-{p_1}^2=p_2^2-p_1^2.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взята точка M. Из точки M проведены две биссектрисы MK и MN углов BMC и AMC соответственно, точки K и N лежат на катетах и $CM=KN$. Докажите, что точка $M-$ середина гипотенузы AB.

Решение:



Так как MK и MN являются биссектрисами смежных углов BMC и AMC, то угол NMK прямой. Тогда точки C и M лежат на окружности с диаметром KN. Из равенства $CM=KN$ следует, что и хорда CM является диаметром этой окружности. Но тогда углы MKC и MNC тоже прямые, следовательно, биссектрисы MK и MN являются и высотами треугольников BMC и AMC. Поэтому эти треугольники равнобедренные: $BM=MC$ и $AM=MC$. Следовательно, $BM=AM$**,** а это и означает, что $M-$ середина гипотенузы AB.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35.
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.