

МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Решите в целых числах уравнение

$$y^2(y - x + 2) - y(x + 4) + 5x + 7 = 0.$$

2. Для некоторого x выполняются равенства

$$\cos 3x = A \cdot \sin 2x \quad \text{и} \quad \sin 3x = B \cdot \cos 4x,$$

где A и B – рациональные числа.

Докажите, что $\sin 3x$ также является рациональным числом.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{a + b - c}{2c} + \frac{b + c - a}{2a} + \frac{a + c - b}{2b} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Докажите, что для корней x_1, x_2 многочлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ и любого ненулевого значения p выполняется неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

5. Треугольник MNK вписан в окружность радиуса R . Биссектрисы внутреннего и внешнего угла K пересекают прямую MN в точках E и F соответственно, при этом $KE = KF$. Докажите, что $MK^2 + NK^2 = 4R^2$.