МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите четырёхзначное натуральное число, для которого отношение этого числа к сумме всех его цифр минимально.
Ответ: 1099.
Решение. Пусть $n = \overline{abcd}$ – некоторое четырёхзначное число $(1 \le a \le 9, 0 \le b, c, d \le 9)$. Пусть $k = \frac{n}{a+b+c+d}$. Тогда

$$k = \frac{1000a + 100b + 10c + d}{a+b+c+d} = \frac{(a+b+c+d) + 9(111a + 11b + c)}{a+b+c+d} = 1 + \frac{9(111a + 11b + c)}{a+b+c+d} \ge$$
$$\ge 1 + \frac{9(111a + 11b + c)}{a+b+c+9} = 1 + \frac{9\big((a+b+c+9) + (110a + 10b - 9)\big)}{a+b+c+9} = 10 + \frac{9(110a + 10b - 9)}{a+b+c+9}.$$

Так как $a \ge 1$, то $110a + 10b - 9 > 0$, следовательно,
$10 + \frac{9(110a+10b-9)}{a+b+c+9} \ge 10 + \frac{9(110a+10b-9)}{a+b+9+9} = 10 + \frac{9(10(a+b+18)+100a-189)}{a+b+18} = 100 + \frac{9(100a-189)}{a+b+18}$. Положим $m = \frac{9(100a-189)}{a+b+18}$. При $a \ge 2$ имеем $m > 0$, при $a = 1$ получаем $m < 0$. Следовательно,

$$k \ge 100 + \frac{9(100-189)}{1+b+18} = 100 - \frac{9\cdot 89}{b+19} \ge 100 - \frac{9\cdot 89}{0+19} = \frac{1099}{19},$$

причём $k = \frac{1099}{19}$ при $n = 1099$.

2. Даны два числа x и y, которые удовлетворяют условиям:
1) $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$;
2) $y^2 - x^2 > y - x$.
Докажите, что эти числа x и y удовлетворяют и неравенству $y^3 - x^3 > y - x$.
Доказательство:
Введем функцию $f(t) = t^2 - t$ и $g(t) = t^3 - t$, где $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
При $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ $f'(t) = 2t - 1 < 0$ и $g'(t) = 3t^2 - 1 < 0 \Longrightarrow f(t)$ и $g(t)$ убывают на этом промежутке.
Перепишем неравенство $b^2 - a^2 > b - a$ в виде

$$f(b) = b^2 - b > a^2 - a = f(a) \Longrightarrow b < a\,.$$

Тогда $g(b) = b^3 - b > a^3 - a = g(a)$, что и требовалось доказать.

3. Для многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами a_i , $i = 0, \ldots, n$ выполняются следующие условия:
1) $P(17) = P(101) = 2024$,
2) $|a_0| < 999$.
Найдите всевозможные значения, которые может принимать a_0 при этих условиях.
Ответ: 307.
Решение: $P(17) = 17\,m + a_0$, $P(101) = 101n + a_0$, где $m, n -$ целые числа.
Так как $P(17) = P(101)$, то $17\,m = 101n \Rightarrow m = 101k, n = 17k$, где $k -$ целое число.
Далее имеем $17 \cdot 101\,k + a_0 = 2024 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1717k$.
Учитывая условие, что $|a_0| < 999$, имеем $|2024 - 1717k| < 999 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a_0 = 307$.

4. Решите уравнение

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)\,.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}}$.

Решение:

Введем функцию $f(t) = t + t^{2023} + t^{2025}$. Функция $f(t)$ является возрастающей, как сумма трех возрастающих функций.

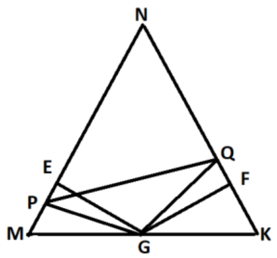
Следовательно, уравнение $f(\cos(2x)) = f(\sin(x))$ равносильно уравнению $\cos(2x) = \sin(x)$. Решим последнее уравнение:

$$1 - 2\sin^2(x) = \sin(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x) = -1, \\ \sin(x) = \frac{1}{2}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = (= 1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. В каких пределах может меняться длина отрезка PQ, где P и Q — это некоторые точки на сторонах MN, NK равностороннего треугольника MNK при условии, что эти точки P и Q равноудалены от середины стороны MK, отрезок PQ не параллелен MK и площадь треугольника равна 1?

Ответ: $PQ \in \left(\frac{\sqrt[4]{27}}{2}; \sqrt[4]{3}\right]$.

Решение: Пусть G — середина стороны MK, E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки G на стороны MN, NK соответственно. Прямоугольные треугольники EGP и FGQ равны по катету и гипотенузе. Точки P и Q лежат по разные стороны от прямой EF, так как отрезок PQ не параллелен MK. Без ограничения общности можно считать, что точка P лежит на отрезке ME, а точка Q — на отрезке NF.



Тогда $\angle PGQ = \angle EGF = 120°$ $\Rightarrow \Delta\, PGQ$ — равнобедренный с углом $120°$ при вершине $\Rightarrow$ $PQ = \sqrt{3}\, PG$.

Так как площадь треугольника MNK равна 1, то $MG = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ и $EG = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$.

Учитывая, что $EG < PG \leq MG$, $PQ = \sqrt{3}\, PG$, $MG = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $EG = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$, получим

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{2} < PQ \leq \sqrt[4]{3}.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.