

МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите четырёхзначное натуральное число, для которого отношение этого числа к сумме всех его цифр минимально.

2. Даны два числа x и y , которые удовлетворяют условиям:

1) $0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}$;

2) $y^2 - x^2 > y - x$.

Докажите, что эти числа x и y удовлетворяют и неравенству $y^3 - x^3 > y - x$.

3. Для многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами a_i , $i = 0, \dots, n$ выполняются следующие условия:

1) $P(17) = P(101) = 2024$,

2) $|a_0| < 999$.

Найдите всевозможные значения, которые может принимать a_0 при этих условиях.

4. Решите уравнение

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x).$$

5. В каких пределах может меняться длина отрезка PQ , где P и Q — это некоторые точки на сторонах MN, NK равностороннего треугольника MNK при условии, что эти точки P и Q равноудалены от середины стороны MK , отрезок PQ не параллелен MK и площадь треугольника равна 1?