

МАТЕМАТИКА (11 класс)**Заключительный этап****Вариант 1**

1. Даны действительные числа a, b, c . Найдите минимальное значение выражения $(7 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (9 + c - a)^2$.

(7 баллов)

Ответ: 108.

Решение: Обозначим $x = 7 + a - b$, $y = 2 + b - c$, $z = 9 + c - a$. Заметим, что $x + y + z = 18$. По неравенству о средних имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = 108.$$

Отметим, что при $a = 0$, $b = 1$, $c = -3$ достигается граница и выполняется равенство $(10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2 = 108$.

2. Даны многочлены $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$
и $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$.

Найдите сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$.

(7 баллов)

Ответ: 2025.

Решение: Заметим, что $P(x) = x^2 Q(x) - x + 506$.

Учитывая, что $Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$, получим

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$. Осталось заметить, что по теореме Виета величина $-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ равна коэффициенту при x^3 многочлена $Q(x)$.

Таким образом, имеем $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 1 + 2024 = 2025$.

3. Решите уравнение:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0.$$

(7 баллов)

Ответ: $-2\sqrt{2}$.

Решение: Представим уравнение в виде

$$\left(\sqrt{x^2 + 1} - 3\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) = 0.$$

Так как уравнение удалось представить в виде двух неотрицательных выражений, то решение уравнения равносильно решению системы:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3, \\ \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 1. \end{cases}$$

Решением первого уравнения является множество $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, при этом второму уравнению удовлетворяет лишь $-2\sqrt{2}$.

4. Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n,$$

докажите неравенство $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$.

(7 баллов)

Решение: Применяя неравенство Коши, для любого i получим

$$x_1 x_2 \dots x_n = x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq x_i^{n-1} + (n-1)x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n.$$

Далее имеем

$$(x_i - n + 1) \geq \frac{x_i^{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n} = \frac{x_i^n}{x_1 x_2 \dots x_n} > 0.$$

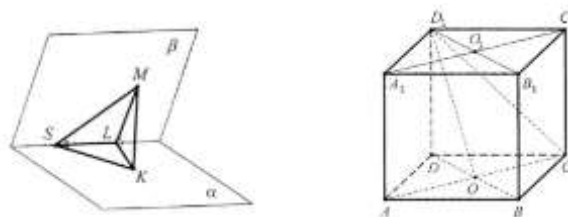
Перемножив неравенства для всех $i = \overline{1, n}$, получим

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq \frac{x_1^n x_2^n \dots x_n^n}{(x_1 x_2 \dots x_n)^n} = 1.$$

5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и две плоскости α и β . Плоскость α перпендикулярна прямой $A_1 C_1$, а плоскость β параллельна прямой CD_1 . Определите наименьший возможный угол между плоскостями α и β . (7 баллов)

Ответ: $\pi/6$.

Решение:



Докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l и образуют двугранный угол $\varphi < \pi/2$, точка $M \in \beta$ и $M \notin l$, $MK \perp \alpha$, $ML \perp l$. Следовательно, $\angle MLK = \varphi$, $\sin \varphi = MK/ML$. Пусть S — произвольно выбранная на l точка, то из неравенства $SM \geq ML$ имеем $\sin \angle MSK = MK/SM \leq MK/ML = \sin \varphi$. Следовательно, $\angle MSK \leq \varphi$.

Вернемся к исходной задаче. Проведем плоскости α и β через точку D_1 . Пусть ребро куба равно 1 и O — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Прямая $A_1 C_1$ перпендикулярна диагонали $B_1 D_1$ и ребру DD_1 , поэтому плоскость $BB_1 D_1 D \perp A_1 C_1$, то есть совпадает с α . Плоскость β проходит через прямую CD_1 , следовательно, D_1 лежит на ребре двугранного угла, образованного α и β . Так как $AC \parallel A_1 C_1$, то $CO \perp \alpha$.

Отметим, $CO = \sqrt{2}/2$, $CD_1 = \sqrt{2}$, $\sin \angle OD_1 C = 1/2$, то есть $\angle OD_1 C = \pi/6$. Как было показано выше, что если φ — двугранный угол между плоскостями α и β , то $\varphi \geq \angle OD_1 C$. Следовательно, $\varphi \geq \pi/6$. Покажем, что угол φ может быть равным $\pi/6$. В плоскости $BB_1 D_1 D$ через точку D_1 проведем прямую $m \perp OD_1$, а затем построим плоскость β через m и прямую CD_1 . Тогда m будет ребром получившегося двугранного угла, а $\angle OD_1 C$ — его плоским углом. Следовательно, в этом случае угол между плоскостями α и β равен $\pi/6$, то есть наименьший возможный угол между плоскостями α и β равен $\pi/6$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.