

МАТЕМАТИКА (8 класс)**Заключительный этап****Вариант 1**

1. Пусть x и y – различные положительные числа, причем $x > y$.

Найдите значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$, если известно, что $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$. (7 баллов)

Ответ: 3.

Решение:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = \frac{5}{2}xy + 2xy, \\ x^2 + y^2 - 2xy = \frac{5}{2}xy - 2xy. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = \frac{9}{2}xy, \\ (x-y)^2 = \frac{1}{2}xy. \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 9. \xrightarrow{x>y} \frac{x+y}{x-y} = 3.$$

2. Известно, что числа $a^2 - a$ и $a^4 - a$ являются целыми числами.

Докажите, что a – это целое число. (7 баллов)

Решение: Пусть $m = a^2 - a$, $n = a^4 - a$. Тогда $n = (m + a)^2 - a$, откуда

$$n - m = m^2 + 2ma.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $m = 0 \Rightarrow a = 0$ или $a = 1 \Rightarrow$ ч. т. д.

2) $m \neq 0 \Rightarrow a = \frac{n-m-m^2}{2m}$ – рациональное число, то есть представимо в виде $a = \frac{p}{q}$,

где целое p и натуральное q – взаимно просты. Тогда $p^2 - pq = mq^2$, а следовательно, p^2 кратно q , а это возможно лишь при $q = 1 \Rightarrow a$ – целое число. $\Rightarrow$ ч. т. д.

3. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Найдите значение произведения $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{79}$.

(7 баллов)

Ответ: $\frac{64000}{79}$.

Решение:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \\ &= \frac{(n^2 - 1)(n + 1)^2}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1)^3}{n^4}. \end{aligned}$$

Тогда произведение $a_2 a_3 \cdots a_k$ равно

$$\frac{1 \cdot 3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdots \frac{(k-1)(k+1)^3}{k^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdots (k-1)^4 \cdot k^3 \cdot (k+1)^3}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdots k^4}.$$

Сократив одинаковые сомножители, получим равенство

$$a_2 a_3 \cdots a_k = \frac{(k+1)^3}{2^3 \cdot k}.$$

Подставив $k = 79$, получим $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{79} = \frac{(79+1)^3}{2^3 \cdot 79} = \frac{80^3}{8 \cdot 79} = \frac{64000}{79}$.

4. Дядя Ваня собрал все яблоки в своем саду в две корзины. Присев на лавочку, он взял одно яблоко из первой корзины и переложил его во вторую корзину, в результате чего средний вес яблок в каждой корзине увеличился на 3 г. Через некоторое время он снова взял одно яблоко из первой корзины и переложил его во вторую корзину, в результате чего средний вес яблок в каждой корзине увеличился на 3%. Чему равен средний вес всех яблок у дяди Вани? (7 баллов)

Ответ: 103.

Решение: Пусть a и b — соответственно средний вес в первой и второй корзине изначально, m и n — соответственно количество яблок в первой и второй корзине изначально.

Тогда суммарный вес изначально в первой и второй корзине равен am и bn соответственно, после первого переложения яблока равен $(a + 3)(m - 1)$ и $(b + 3)(n + 1)$ соответственно, а после второго переложения яблока равен $1,03(a + 3)(m - 2)$ и $1,03(b + 3)(n + 2)$. Тогда

$$am - (a + 3)(m - 1) = (b + 3)(n + 1) - bn,$$

$$(a + 3)(m - 1) - 1,03(a + 3)(m - 2) = 1,03(b + 3)(n + 2) - (b + 3)(n + 1).$$

Раскрыв в обоих равенствах скобки и приведя подобные слагаемые получаем

$$a - b = 3(m + n),$$

$$0,03(am + bn) = 1,06(a - b) - 0,09(m + n).$$

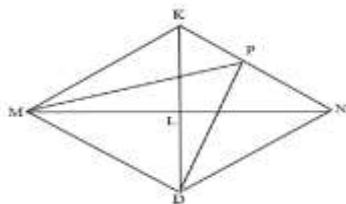
Тогда

$$\frac{am + bn}{m + n} = \frac{106(a - b)}{3(m + n)} - 3 = 106 - 3 = 103.$$

5. В равнобедренном треугольнике MNK с основанием MN проведены биссектрисы KL и MP . Найдите $\angle MKN$ треугольника MNK , если известно, что $MP = 2KL$. (7 баллов)

Ответ: 108° .

Решение:



1. Построим треугольник до ромба $MNKD$, причем $L \in KD$, так как KL — биссектриса и медиана (треугольник MNK — равнобедренный).
2. Трапеция $MKPD$ является равнобокой, так как диагонали ее равны ($MP = 2KL$).
3. Треугольники MKP и DPK равны по трем сторонам. Следовательно, равны и соответствующие углы.
4. Пусть угол KMP равен α , тогда угол KDP тоже равен α .
5. Так как MP — биссектриса, то $\angle KMN = 2\alpha$. Тогда угол $\angle KMD = 4\alpha$ и $\angle MKN = \angle KPD = 180^\circ - 4\alpha$, $\angle DKP = \frac{180^\circ - 4\alpha}{2} = 90^\circ - 2\alpha$.
6. По теореме о сумме углов треугольника относительно треугольника DPK имеем

$$\alpha + 180^\circ - 4\alpha + 90^\circ - 2\alpha = 180^\circ.$$

$$\alpha = 18^\circ.$$

Следовательно, $\angle MKN = \angle KPD = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4 \cdot 18^\circ = 108^\circ$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.