

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 1

Класс: 11

Задача 1 (10 баллов). Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $3/41$.

Задача 2 (10 баллов). Даны вершины правильного 100-угольника $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? Ответ обосновать.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{4a \sin^2 t + 4a(1 + 2\sqrt{2}) \cos t - 4(a - 1) \sin t - 5a + 2}{2\sqrt{2} \cos t - \sin t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале $(0; \pi/2)$.

Задача 4а (10 баллов). См. на обороте листа.

Задача 4б (8 баллов). Найдите угол между плоскостями BCE и AFE (см. условие задачи 4а).

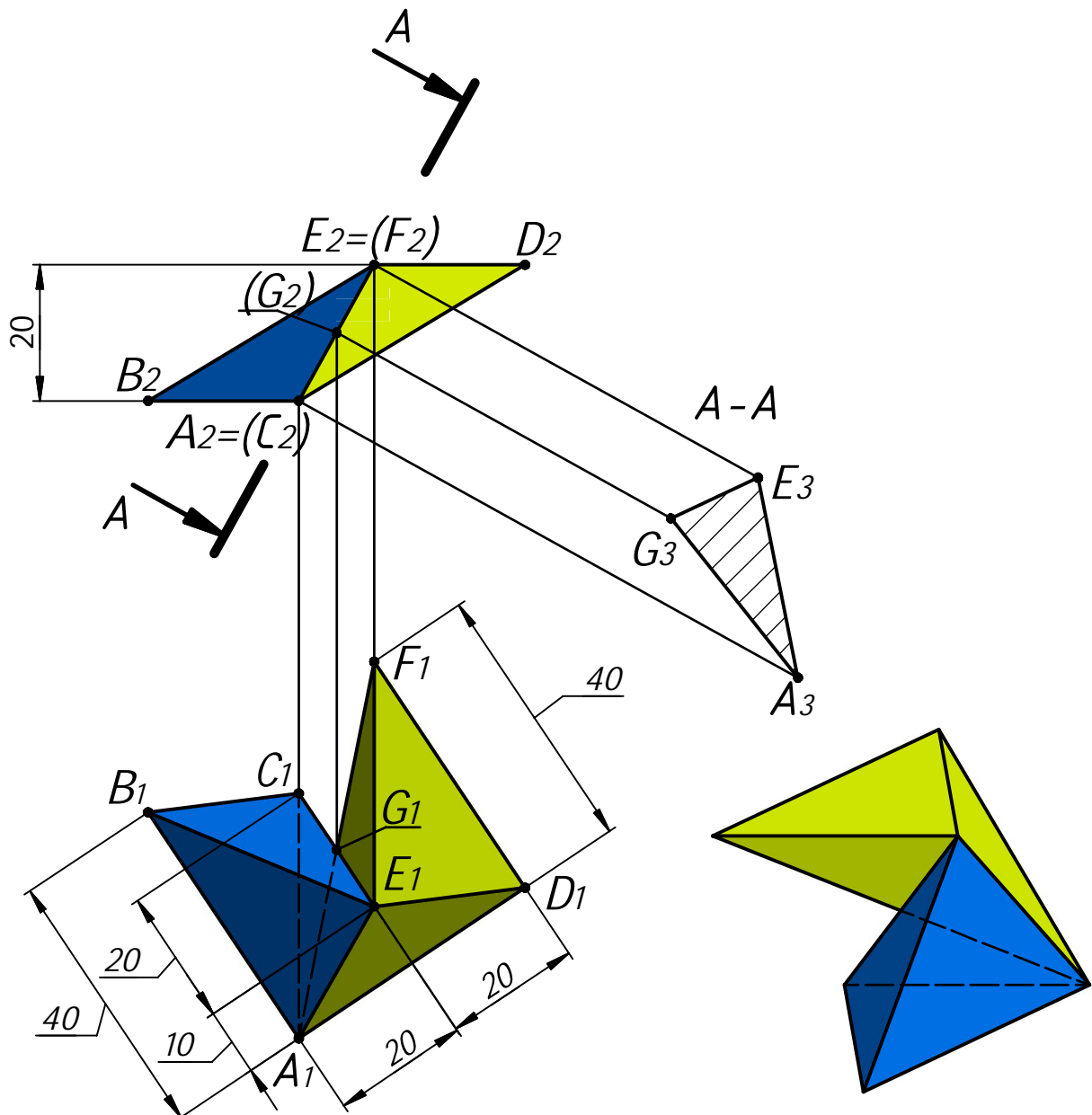
Задача 5 (20 баллов). См. лист 2.

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF . Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 20 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид $ABCE$ и $DEFA$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.

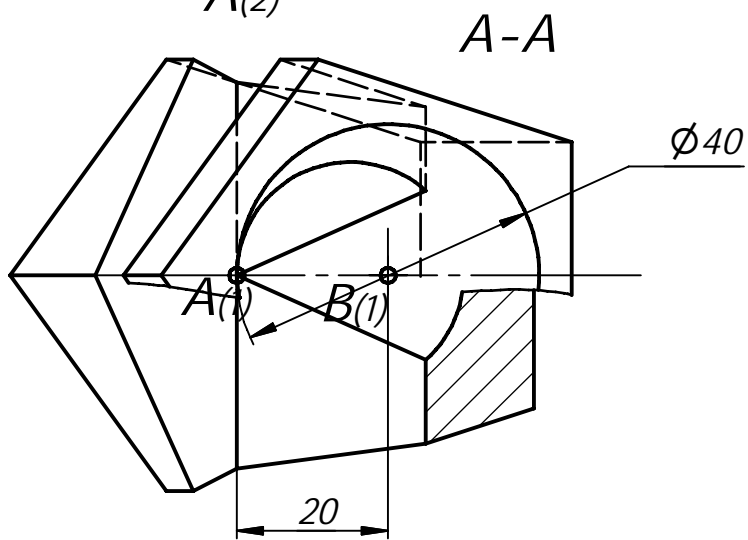
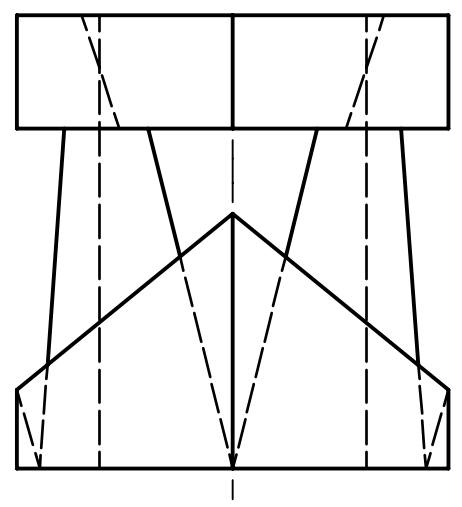
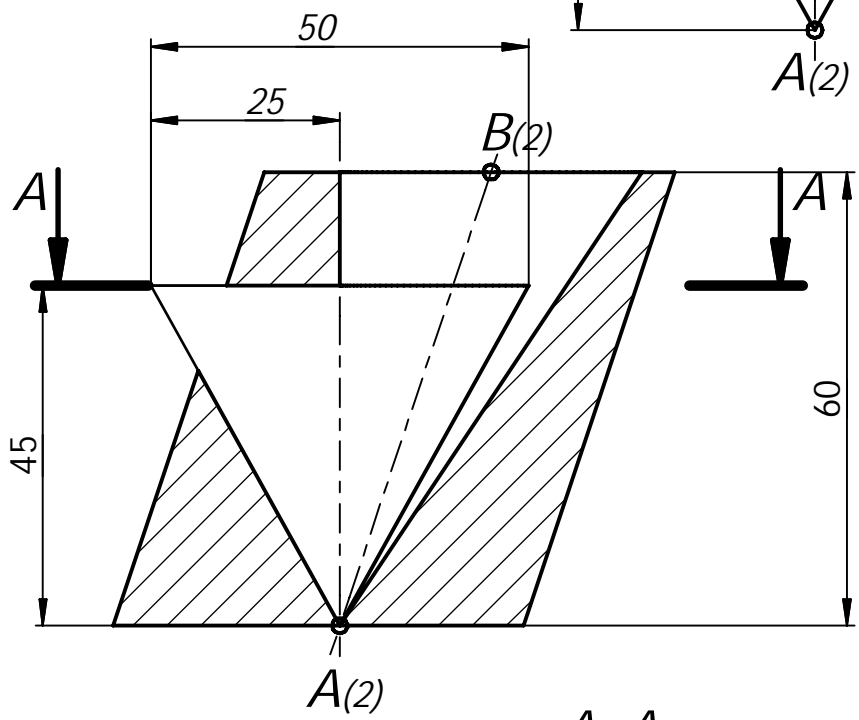
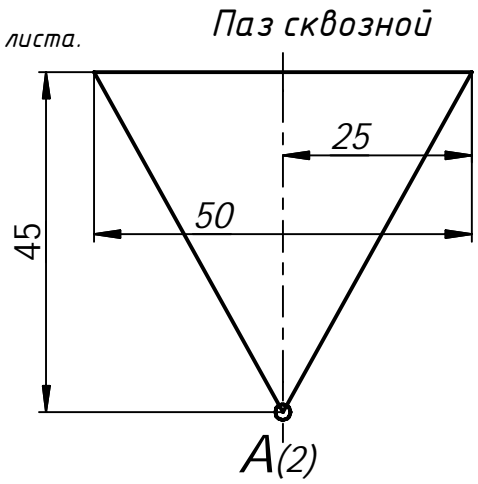
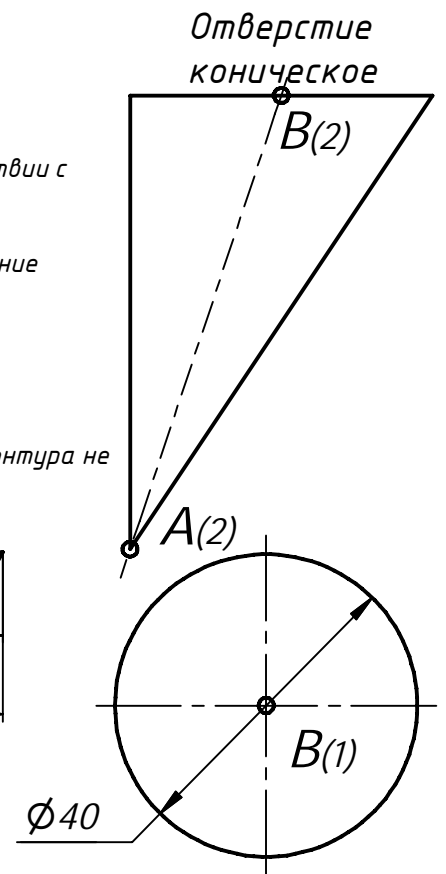


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 3 класс: 9-11

Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках A и B, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза A-A
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.



Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $3/41$.

(10 баллов)

Решение. Наименьшее целое число из девяток в десятичной форме записи, делящееся на 41, это $99999, 99999 = 41 \cdot 2439$. Тогда

$$\frac{1}{41} = \frac{3 \cdot 2439}{99999} = \frac{7317}{10^5 - 1} = \frac{7317}{10^5} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-5}} = 7317 \cdot 10^{-5} (1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \dots) = 0,073170731707317 \dots$$

Искомая цифра последняя в 200000-м периоде. Это цифра 7.

Ответ: 7.

2. Даны вершины правильного 100-угольника $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? (10 баллов)

Решение. Пусть вершины занумерованы по часовой стрелке.

Обозначим выбранные вершины по часовой стрелке K, L, M , причем угол KLM тупой. Если $K = A_k, L = A_l, M = A_m$, то

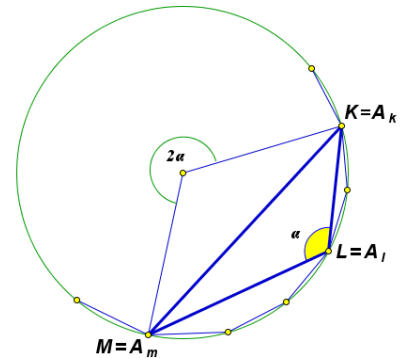
$$\alpha = \angle KLM = \frac{180^\circ}{100} (100 - (m - k)) > 90^\circ, \quad 0 < m - k < 50.$$

Разность $m - k$ считается по модулю 100

(например, $15 - 70 \pmod{100} = 45$).

Посчитаем число способов выбрать вершины K, L, M .

Сначала одним из 100 способов выберем вершину K . Затем выберем любые две из вершин $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+49}$ (номера точек считаются по модулю 100). Из этих вершин ближняя к K будет L , дальняя – M . Итак, имеем $100 \cdot C_{49}^2 = 100 \cdot 49 \cdot 24 = 117600$.



Ответ: 117600.

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{4a \sin^2 t + 4a(1 + 2\sqrt{2}) \cos t - 4(a - 1) \sin t - 5a + 2}{2\sqrt{2} \cos t - \sin t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале $(0; \pi/2)$. (12 баллов)

Решение. Пусть $x = \cos t, y = \sin t, x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (0; 1)$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{4ay^2 + 4a(1 + 2\sqrt{2})x - 4(a - 1)y - 5a + 2}{2\sqrt{2}x - y} = 4a,$$

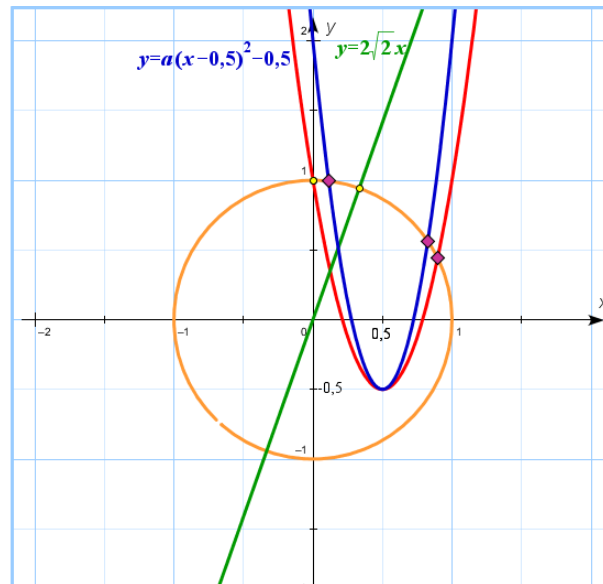
$$4ay^2 + 4a(1 + 2\sqrt{2})x - 4(a - 1)y - 5a + 2 = 4a2\sqrt{2}x - 4ay,$$

$$4ay^2 + 4ax + 4y - 5a + 2 = 0, \quad 2\sqrt{2}x - y \neq 0.$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} 4ay^2 + 4ax + 4y - 5a + 2 = 0, \\ 2\sqrt{2}x - y \neq 0, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (0; 1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 4ax^2 - 4ax + a - 2, \\ y \neq 2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (0; 1). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}, \\ y \neq 2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (0; 1). \end{cases}$$



Найдем значение параметра a , при котором парабола

$y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ проходит через точку $(0; 1)$.

Имеем $1 = \frac{a}{4} - \frac{1}{2}$, $a = 6$. Поскольку парабола симметрична относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, то два различных решения система будет иметь при $a > 6$, кроме случая, когда парабола пройдет через точку пересечения окружности и прямой $y = 2\sqrt{2}x$.

Найдем решение системы $\begin{cases} y = 2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (0; 1). \end{cases}$ Имеем $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдем

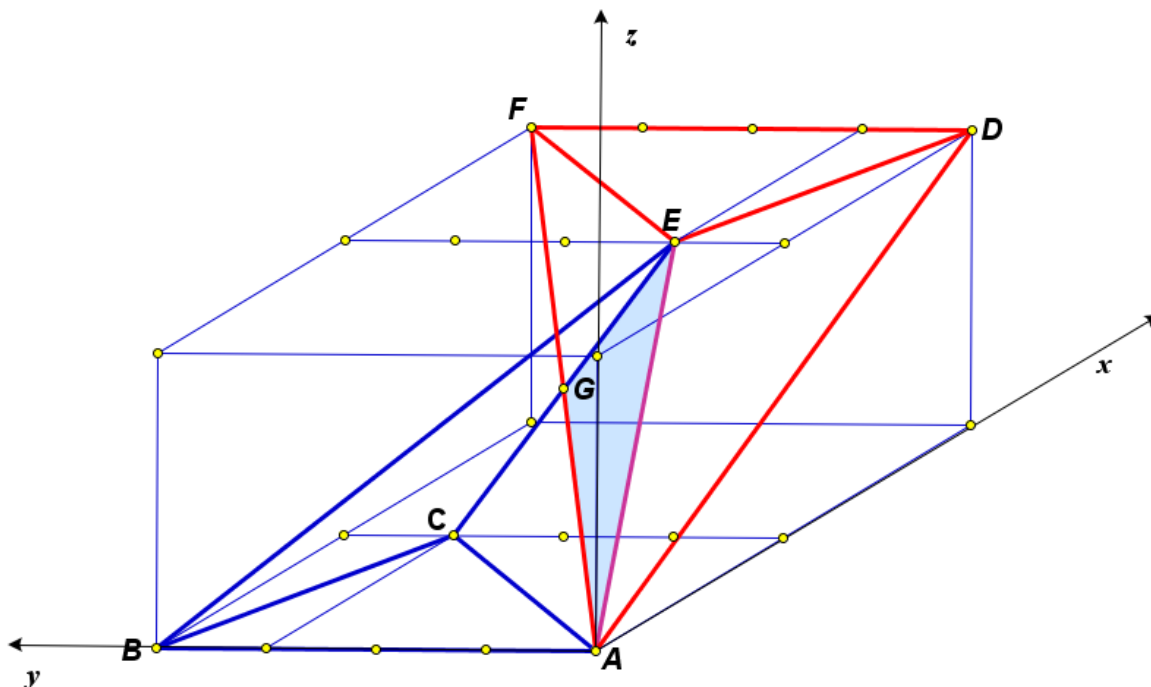
значение параметра a , при котором парабола $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ проходит через точку

$(1/3; 2\sqrt{2}/3)$. Решаем уравнение $\frac{2\sqrt{2}}{3} = a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, $a = 18 + 24\sqrt{2}$.

Ответ: $a \in (6; 18 + 24\sqrt{2}) \cup (18 + 24\sqrt{2}; +\infty)$

46. Найдите угол между плоскостями BCE и AFE (см. условие задачи 4а). (8 баллов)

Решение.



Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда $A = (0; 0; 0), B = (0; 40; 0), E = (20; 10; 20), F = (40; 40; 20), C = (20; 30; 0)$. Имеем $\vec{BC} = \{20; -10; 0\}, \vec{BE} = \{20; -30; 20\}, \vec{AE} = \{20; 10; 20\}, \vec{AF} = \{40; 40; 20\}$. Пусть $\vec{n} \perp \vec{BC}, \vec{n} \perp \vec{BE}, \vec{m} \perp \vec{AE}, \vec{m} \perp \vec{AF}, \vec{n} = \{a; b; c\}, \vec{m} = \{d; e; f\}$. Тогда имеем две системы линейных алгебраических уравнений:

$\begin{cases} 20a - 10b = 0, \\ 20a - 30b + 20c = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 20d + 10e + 20f = 0, \\ 40d + 40e + 20f = 0. \end{cases}$ Для первой системы имеем $\begin{cases} b = 2a, \\ c = 2a, \end{cases}$ и в качестве вектора нормали к плоскости BCE можно выбрать вектор $\vec{n} = \{1; 2; 2\}$. Для второй системы имеем $\begin{cases} e = f, \\ d = -3f/2, \end{cases}$ и в качестве вектора нормали к плоскости AFE можно выбрать вектор $\vec{m} = \{-3; 2; 2\}$. Угол между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям. Следовательно, косинус искомого угла α можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{5}{3\sqrt{17}} = \frac{5\sqrt{17}}{51}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{17}}{51}$.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 2

Класс: 11

Задача 1 (10 баллов). Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $1/41$.

Задача 2 (10 баллов). Даны вершины правильного 120-угольника $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? Ответ обосновать.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{4a \cos^2 t + 4a(2\sqrt{2} - 1) \cos t + 4(a - 1) \sin t + a + 2}{\sin t + 2\sqrt{2} \cos t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале $(-\pi/2; 0)$.

Задача 4а (10 баллов). См. на обороте листа.

Задача 4б (8 баллов). Найдите угол между плоскостями BCE и ADE (см. условие задачи 4а).

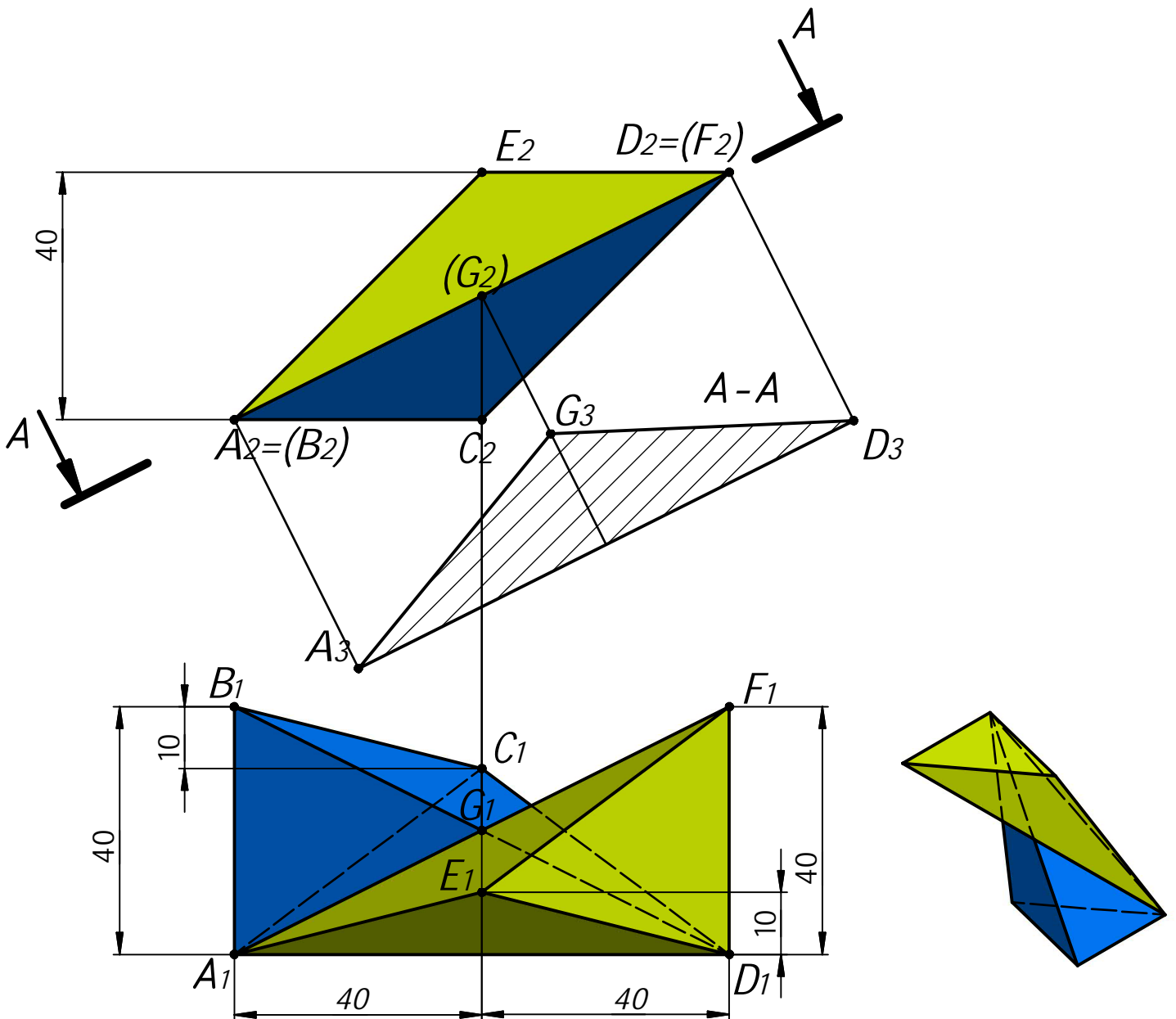
Задача 5 (20 баллов). См. лист 2.

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF . Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 40 мм.

Требуется:

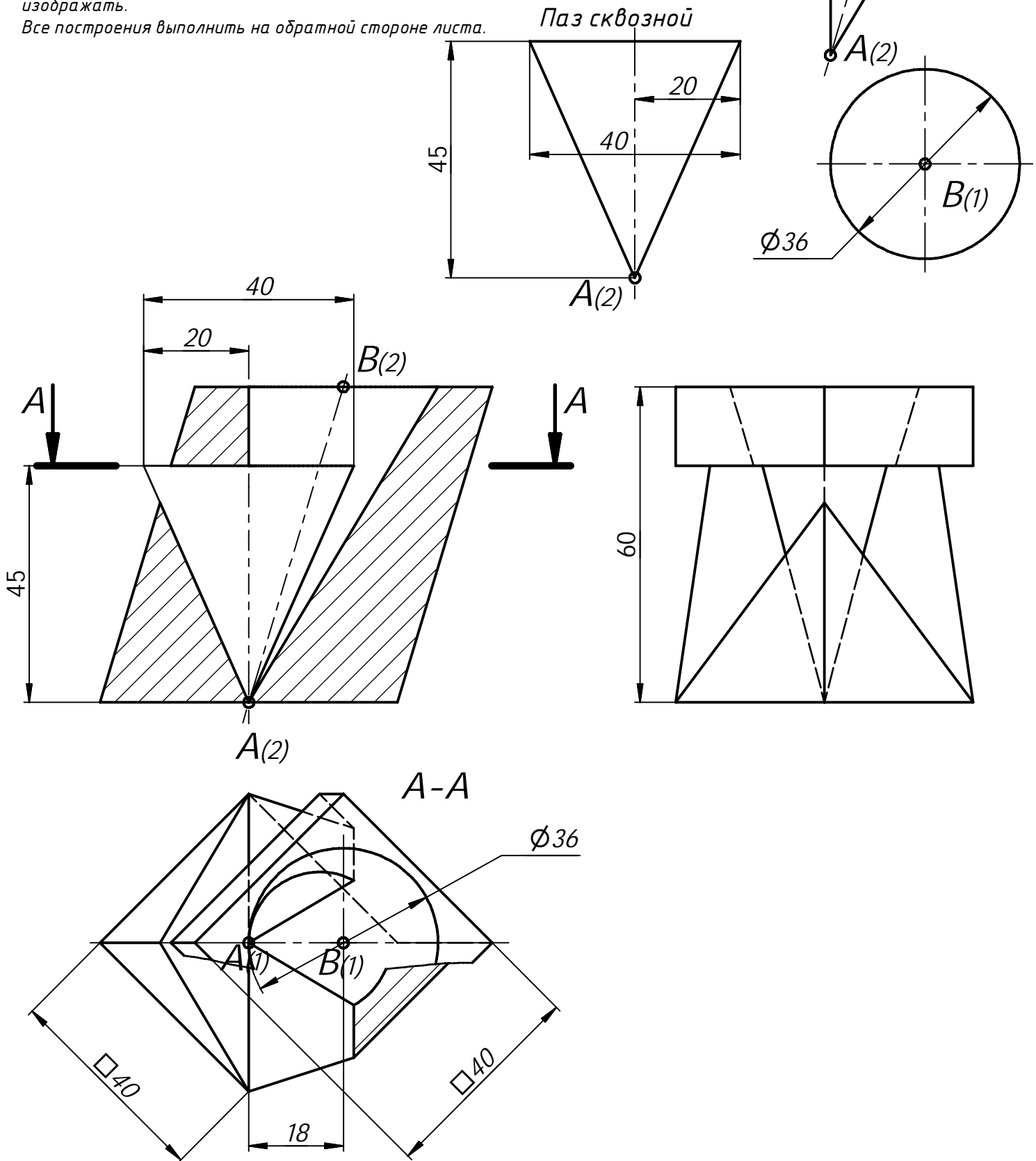
- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид $ABCD$ и $DEFA$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Все построения выполнить на обратной стороне листа.



Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

1. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $1/41$.

(10 баллов)

Решение. Наименьшее целое число из девяток в десятичной форме записи, делящееся на 41, это 99999, $99999 = 41 \cdot 2439$. Тогда

$$\frac{1}{41} = \frac{2439}{99999} = \frac{2439}{10^5-1} = \frac{2439}{10^5} \cdot \frac{1}{1-10^{-5}} = 2439 \cdot 10^{-5}(1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \dots) = 0,024390249302439 \dots$$

Искомая цифра последняя в 200000-м периоде. Это цифра 9.

Ответ: 9.

2. Даны вершины правильного 120-угольника $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{120}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? (10 баллов)

Решение. Пусть вершины занумерованы по часовой стрелке.

Обозначим выбранные вершины по часовой стрелке K, L, M ,

причем угол KLM тупой. Если $K = A_k, L = A_l, M = A_m$, то

$$\alpha = \angle KLM = \frac{180^\circ}{120} (120 - (m - k)) > 90^\circ, \quad 0 < m - k < 60.$$

Разность $m - k$ считается по модулю 120

(например, $15 - 90 \pmod{120} = 45$).

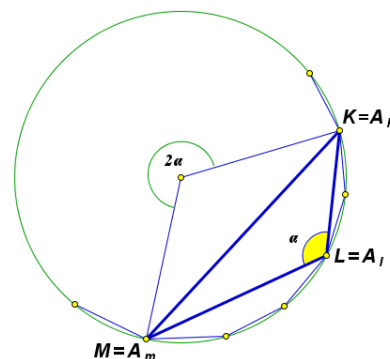
Посчитаем число способов выбрать вершины K, L, M .

Сначала одним из 120 способов выберем вершину K . Затем выберем любые две из вершин

$A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+59}$ (номера точек считаются по модулю 120). Из этих вершин ближняя к K

будет L , дальняя – M . Итак, имеем $120 \cdot C_{59}^2 = 120 \cdot 59 \cdot 29 = 205320$.

Ответ: 205320.



3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{4a \cos^2 t + 4a(2\sqrt{2} - 1) \cos t + 4(a - 1) \sin t + a + 2}{\sin t + 2\sqrt{2} \cos t} = 4a$$

имеет ровно два различных решения в интервале $(-\pi/2; 0)$. (12 баллов)

Решение. Пусть $x = \cos t, y = \sin t, x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0)$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{4ax^2 + 4a(2\sqrt{2} - 1)x + 4(a - 1)y + a + 2}{2\sqrt{2}x + y} = 4a,$$

$$4ax^2 + 4a(2\sqrt{2} - 1)x + 4(a - 1)y + a + 2 = 4a2\sqrt{2}x + 4ay,$$

$$4ax^2 - 4ax - 4y + a + 2 = 0, \quad 2\sqrt{2}x + y \neq 0.$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} 4ax^2 - 4ax - 4y + a + 2 = 0, \\ 2\sqrt{2}x + y \neq 0, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 4ax^2 - 4ax + a + 2, \\ y \neq -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \\ y \neq -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases}$$

Найдем значение параметра a , при котором парабола

$y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ проходит через точку $(0; -1)$.

Имеем $-1 = \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$, $a = -6$. Поскольку парабола

симметрична относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, то два различных решения система будет иметь при $a < -6$, кроме случая, когда парабола пройдет через точку пересечения окружности и прямой $y = -2\sqrt{2}x$.

Найдем решение

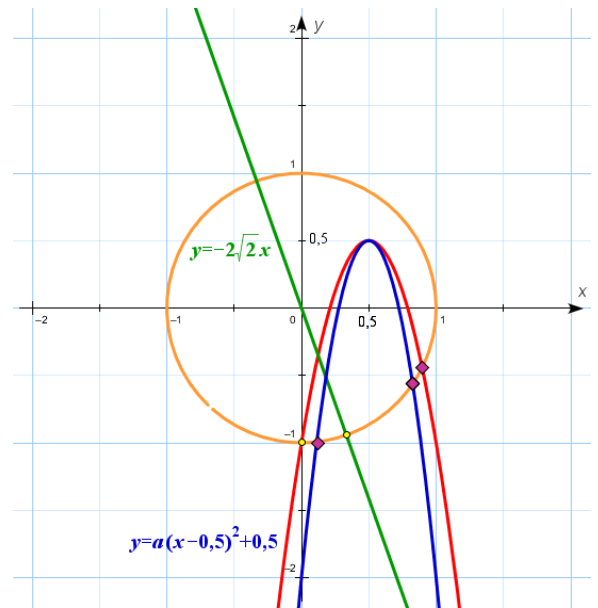
системы $\begin{cases} y = -2\sqrt{2}x, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in (0; 1), y \in (-1; 0). \end{cases}$ Имеем

$x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдем значение параметра a , при

котором парабола $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ проходит через

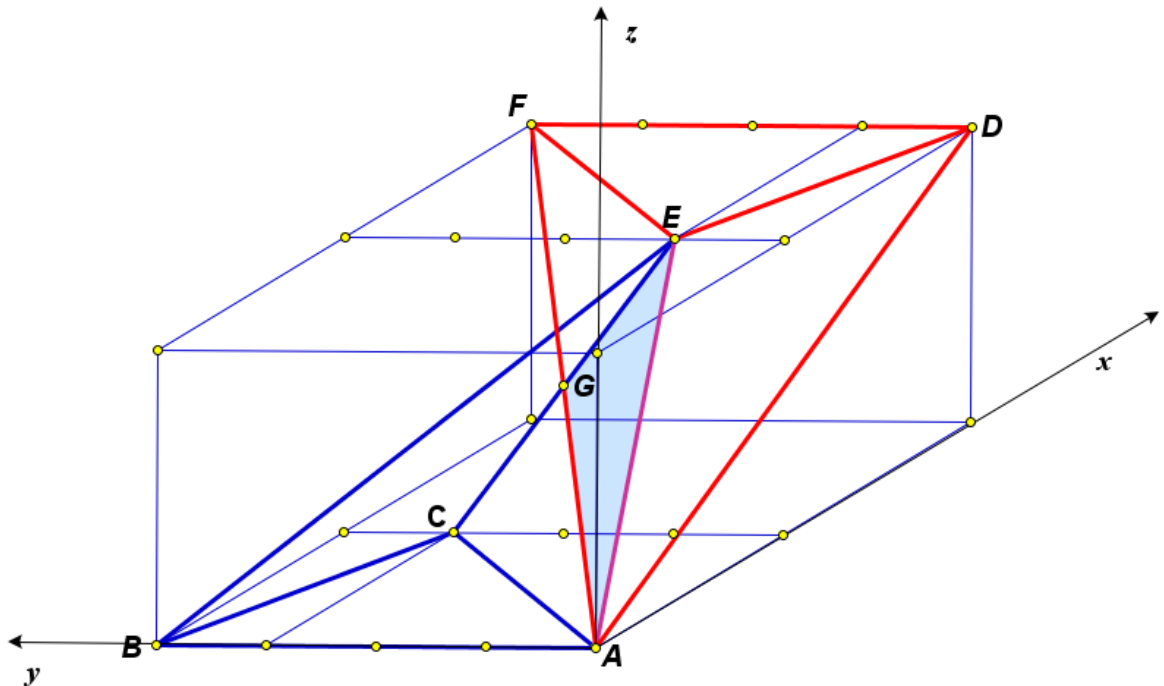
точку $(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3})$. Решаем уравнение $-\frac{2\sqrt{2}}{3} = a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, $a = -18 - 24\sqrt{2}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -18 - 24\sqrt{2}) \cup (-18 - 24\sqrt{2}; -6)$



46. Найдите угол между плоскостями BCE и AFE (см. условие задачи 4а). (8 баллов)

Решение.



Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда $A = (0; 0; 0), B = (0; 40; 0), E = (20; 10; 20), F = (40; 40; 20), C = (20; 30; 0)$. Имеем $\vec{BC} = \{20; -10; 0\}$, $\vec{BE} = \{20; -30; 20\}$,

$\vec{AE} = \{20; 10; 20\}$, $\vec{AF} = \{40; 40; 20\}$. Пусть $\vec{n} \perp \vec{BC}$, $\vec{n} \perp \vec{BE}$, $\vec{m} \perp \vec{AE}$, $\vec{m} \perp \vec{AF}$, $\vec{n} = \{a; b; c\}$, $\vec{m} = \{d; e; f\}$. Тогда имеем две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 20a - 10b = 0, \\ 20a - 30b + 20c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 20d + 10e + 20f = 0, \\ 40d + 40e + 20f = 0. \end{cases} \quad \text{Для первой системы имеем } \begin{cases} b = 2a, \\ c = 2a, \end{cases} \text{ и в}$$

качестве вектора нормали к плоскости BCE можно выбрать вектор $\vec{n} = \{1; 2; 2\}$. Для

второй системы имеем $\begin{cases} e = f, \\ d = -3f/2, \end{cases}$ и в качестве вектора нормали к плоскости AFE

можно выбрать вектор $\vec{m} = \{-3; 2; 2\}$. Угол между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям. Следовательно, косинус искомого угла α можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{5}{3\sqrt{17}} = \frac{5\sqrt{17}}{51}.$$

Ответ: $\arccos \frac{5\sqrt{17}}{51}$.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 3

Класс: 11

Задача 1 (10 баллов). Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ удовлетворяет неравенствам $a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} \geq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, и $a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 \geq 0$, $a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$. Найдите a_{22} , если $a_{10} = 10$.

Задача 2 (10 баллов). Найдите вероятность того, что случайно выбранное натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, делится на 8 без остатка.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{|\cos t - 0,5| + |\sin t| - a}{\sqrt{3} \sin t - \cos t} = 0$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; \pi/2]$. Укажите количество различных решений этого уравнения на отрезке $[0; \pi/2]$ при каждом найденном значении параметра a .

Задача 4а (10 баллов). См. лист 2.

Задача 4б (8 баллов). Найдите угол между плоскостями BCD и AFE (см. условие задачи 4а).

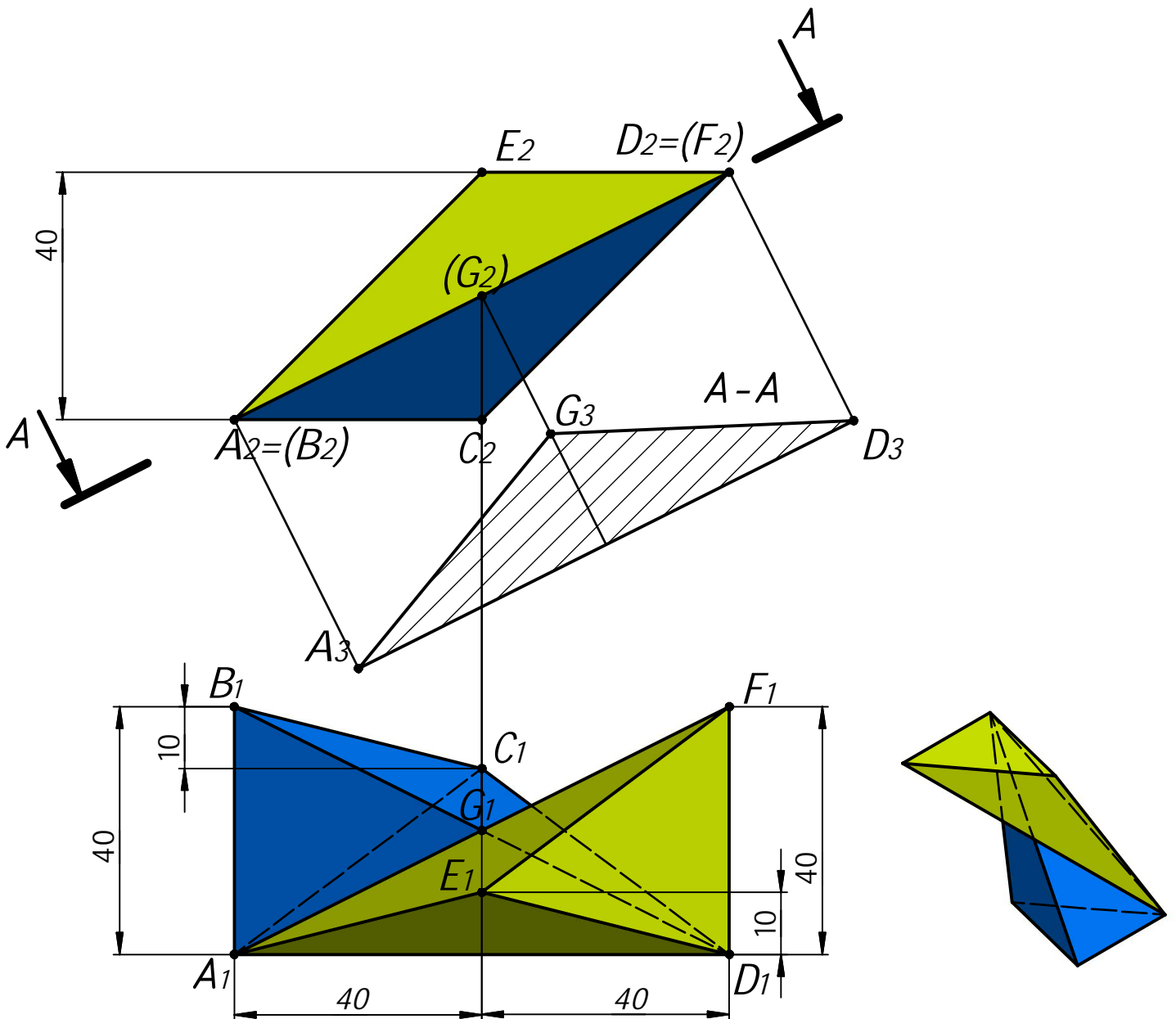
Задача 5 (20 баллов). См. лист 3.

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF . Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 40 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид $ABCD$ и $DEFA$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.

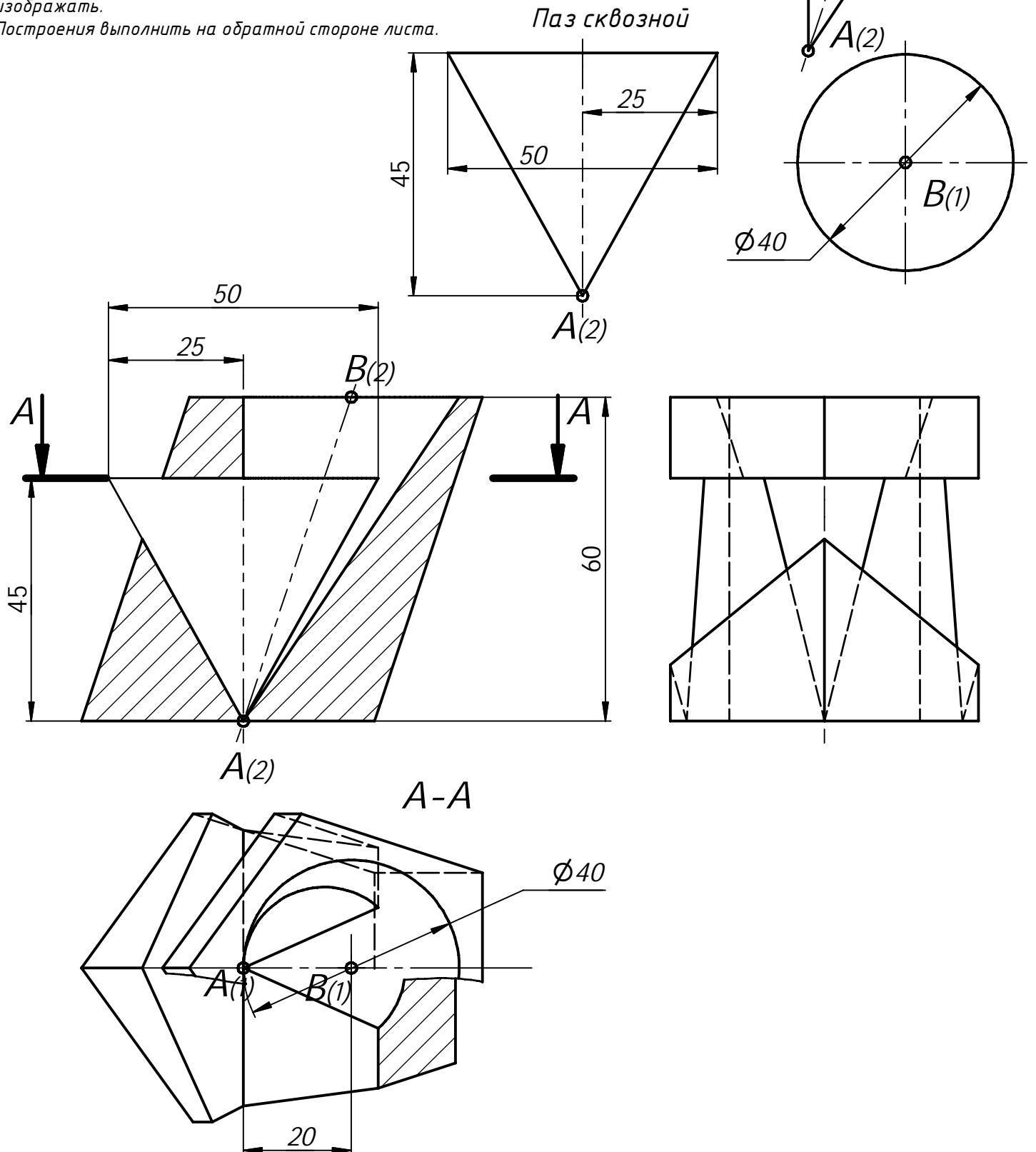


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 3 класс: 9-11

Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках A и B, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза A-A
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.



Отверстие
коническое

$B(2)$

$A(2)$

$B(1)$

$\Phi 40$

Паз сквозной

25

50

45

$A(2)$

50

25

$B(2)$

A

45

60

A

$A(2)$

A-A

$\Phi 40$

$A(1)$

$B(1)$

20

Решение варианта №3 (Математика - 11 класс)

1. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ удовлетворяет неравенствам $a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} \geq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, и $a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 \geq 0$, $a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$. Найдите a_{22} , если $a_{10} = 10$. (10 баллов)

Решение.

Обозначим $b = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$, $b_n = a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2}$, $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, $b_{99} = a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1$, $b_{100} = a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2$. По условию $b_n \geq 0$, при $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Имеем $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100} = b - 2022b + 2021b = 0$. Следовательно, $b_n = 0$, при $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Отсюда получаем $(a_n - a_{n+1}) + 2021(a_{n+2} - a_{n+1}) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, $a_{99} - a_{100} + 2021(a_1 - a_{100}) = 0$, $(a_{100} - a_1) + 2021(a_2 - a_1) = 0$.

Имеем $a_2 - a_3 = \frac{a_1 - a_2}{2021}$, $a_3 - a_4 = \frac{a_1 - a_2}{2021^2}$, \dots , $a_{99} - a_{100} = \frac{a_1 - a_2}{2021^{98}}$, $a_{100} - a_1 = \frac{a_1 - a_2}{2021^{99}}$. С учетом равенства $a_{100} - a_1 = 2021(a_1 - a_2)$ имеем $\frac{a_1 - a_2}{2021^{99}} = 2021(a_1 - a_2)$. Отсюда получаем $a_n = a_1$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Следовательно, $a_{22} = a_{10} = 10$.

Ответ: 10.

2. Найдите вероятность того, что случайно выбранное натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, делится на 8 без остатка. (10 баллов)

Решение. Натуральное число n делится на 8 без остатка, если число, составленное из трех последних цифр в записи числа n (в порядке их следования), делится на 8. Если же число, составленное из трех последних цифр, не делится на 8, то и число n не делится на 8.

Найдем количество трехзначных натуральных чисел, составленных из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и делящихся на 8. Эти числа также делятся и на 4. Найдем сначала все двузначные числа, составленные из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, которые делятся на 4. Это числа: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84. Среди них 7 чисел, которые делятся на 8. Трехзначное число с последними двумя цифрами, образующими число, делящееся на 8, будет делиться на 8, если первая цифра этого числа является четным числом. Действительно, $100n + 8k = 8m$, $25n = 2(m - k)$, $m, n, k \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Таким образом, с помощью двузначных чисел, делящихся на 8 с указанными условиями, можно получить 18 трехзначных, делящихся на 8. Оставшиеся 7 чисел делятся на 4, но не делятся на 8, т.е. их можно представить в виде $4(2k + 1)$, $k = 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Тогда $100n + 4(2k + 1) = 8m$, $25n + 2k + 1 = 2m$, $m, n, k \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow n \in \{1, 3, 5, 7\}$. Таким образом, получаем еще 24 трехзначных чисел, делящихся на 8. В сумме имеем всего 42 трехзначных натуральных чисел, составленных из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и делящихся на 8.

Первые две цифры пятизначного числа можно выбирать любыми из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 с учетом их различия и различия с выбранными тремя последними цифрами, т.е. будем иметь $5 \cdot 4$ способов. Количество всех способов выбрать натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, равно $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Искомая вероятность равна $P = \frac{42 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}$. **Ответ: $\frac{1}{8}$.**

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{|\cos t - 0,5| + |\sin t| - a}{\sqrt{3} \sin t - \cos t} = 0$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; \pi/2]$. Укажите количество различных решений этого уравнения на отрезке $[0; \pi/2]$ при каждом найденном значении параметра a . (12 баллов)

Решение. Пусть $x = \cos t$, $y = \sin t$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{|x - 0,5| + |y| - a}{\sqrt{3}y - x} = 0,$$

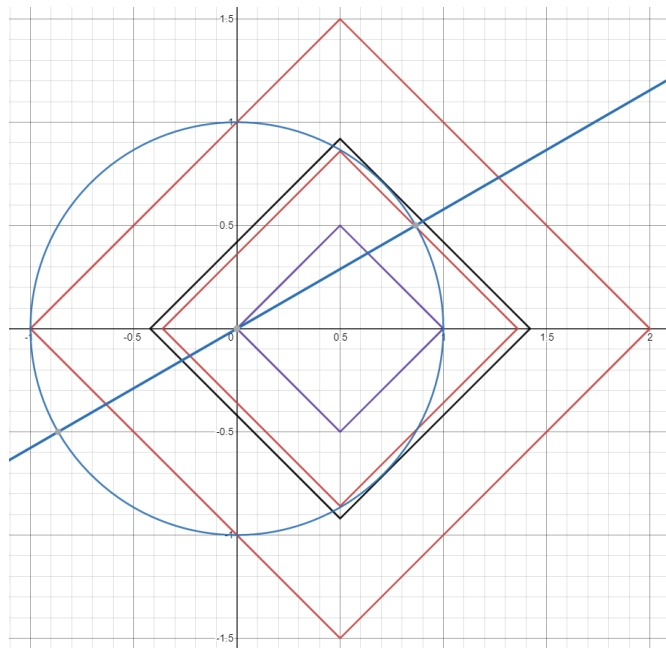
$$|x - 0,5| + |y| - a = 0, \sqrt{3}y - x \neq 0.$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} |x - 0,5| + |y| = a, \\ \sqrt{3}y - x \neq 0, \\ x^2 + y^2 = 1, x \in [0; 1], y \in [0; 1]. \end{cases} \quad \text{Отметим, что}$$

$a > 0$. Точка пересечения окружности

$x^2 + y^2 = 1, x \in [0; 1], y \in [0; 1]$, с прямой $\sqrt{3}y - x = 0$ имеет координаты $(\sqrt{3}/2; 1/2)$.



Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(1; 0)$. Имеем $a = 0,5$. При $a < 0,5$ решений нет. Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(1/2; \sqrt{3}/2)$. Имеем $a = \sqrt{3}/2$. При этом a квадрат, окружность и прямая $\sqrt{3}y - x = 0$ пересекаются в точке $(\sqrt{3}/2; 1/2)$, и система имеет единственное решение. Следовательно, при $0,5 \leq a \leq \sqrt{3}/2$ система имеет единственное решение.

Найдем значение параметра a , при котором сторона квадрата, лежащая на прямой $x + y = a + 0,5$ касается окружности. Точка касания лежит на прямой $y = -x$, и $a + 0,5 = \sqrt{2}$. Тогда при $\sqrt{3}/2 < a < \sqrt{2} - 0,5$ система будет иметь три решения. При $a = \sqrt{2} - 0,5$ система имеет два решения.

Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(0; 1)$. Имеем $a = 1,5$. При $\sqrt{2} - 0,5 < a \leq 1,5$ система имеет единственное решение.

При $a > 1,5$ система решений не имеет.

Ответ: уравнение имеет хотя бы одно решение при $a \in [0,5; 1,5]$,

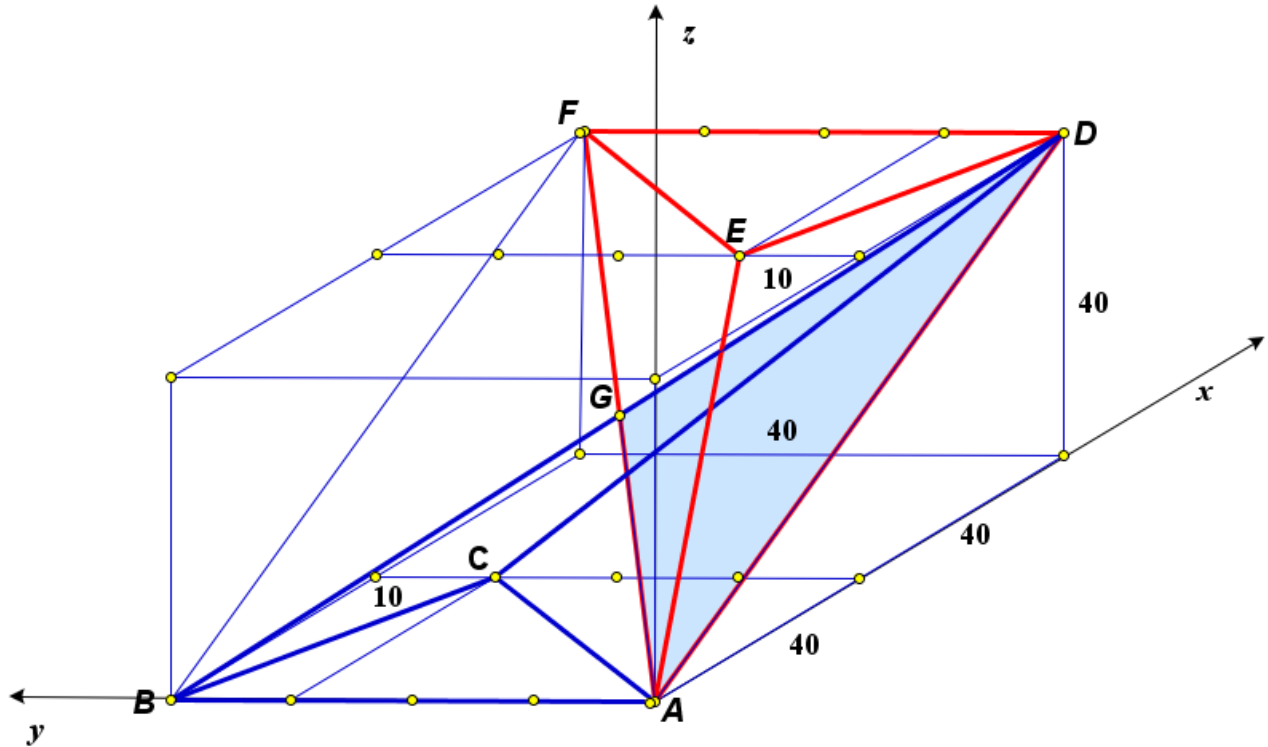
при $a \in [0,5; \sqrt{3}/2] \cup (\sqrt{2} - 0,5; 1,5]$ уравнение имеет 1 решение,

при $a \in (\sqrt{3}/2; \sqrt{2} - 0,5)$ уравнение имеет 3 решения,

при $a = \sqrt{2} - 0,5$ уравнение имеет 2 решения.

46. Найдите угол между плоскостями BCD и AFE (см. условие задачи 4а). (8 баллов)

Решение.



Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда $A = (0; 0; 0), B = (0; 40; 0), E = (40; 10; 40), F = (80; 40; 40), C = (40; 30; 0), D = (80; 0; 40)$. Имеем $\vec{BD} = \{80; -40; 40\}, \vec{BC} = \{40; -10; 0\}, \vec{AE} = \{40; 10; 40\}, \vec{AF} = \{80; 40; 40\}$. Пусть $\vec{n} \perp \vec{BC}, \vec{n} \perp \vec{BD}, \vec{m} \perp \vec{AE}, \vec{m} \perp \vec{AF}, \vec{n} = \{a; b; c\}, \vec{m} = \{d; e; f\}$. Тогда имеем две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 40a - 10b = 0, \\ 80a - 40b + 40c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 40d + 10e + 40f = 0, \\ 80d + 40e + 40f = 0. \end{cases}$$

Для первой системы имеем $\begin{cases} b = 4a, \\ c = 2a, \end{cases}$ и в качестве вектора нормали к плоскости BCD можно выбрать вектор $\vec{n} = \{1; 4; 2\}$. Для второй системы имеем $\begin{cases} e = 2f, \\ d = -3f/2, \end{cases}$ и в качестве вектора нормали к плоскости AFE можно выбрать вектор $\vec{m} = \{-3; 4; 2\}$. Угол между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям. Следовательно, косинус искомого угла α можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{17}{\sqrt{21} \cdot 29} = \frac{17\sqrt{609}}{609}.$$

Ответ: $\arccos \frac{17\sqrt{609}}{609}$.