# Компьютерное моделирование и графика;

# тур по математике и инженерной графике

# 9-й класс

# Вариант №1

**№1.** Количество студентов юношей в университете на 35% больше, чем студентов девушек. Все обучающиеся распределены по двум корпусам, причём в первом корпусе учатся $\frac{2}{5}$ всех юношей, а во втором - $\frac{4}{7}$ всех девушек. Сколько всего обучающихся в университете, если известно, что в первом корпусе учится меньше 2500, а во втором больше 2500 человек?

**Решение:**

Пусть в университете учится $n$ девушек, тогда число юношей $1{,}35n = \frac{27}{20}n$, отсюда можно сделать вывод, что число $n$ кратно 20, то есть $n = 20m$.

Значит, число девушек $20m$, а юношей $27m$.

В первом корпусе учится $\frac{2}{5}$ всех юношей, то есть $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m$ студентов, во втором корпусе учится $\frac{4}{7}$ всех девушек, то есть $\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m$ студенток. Для выполнения условия целочисленности необходимо, чтобы число $m$ было кратно 35, то есть $m = 35k$.

Тогда в первом корпусе $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m = \frac{54}{5} \cdot 35k = 378k$ студентов, $\frac{3}{7} \cdot 20m = \frac{60}{7}m = \frac{60}{7} \cdot 35k = 300k$ студенток и всего $678k$ человек,

а во втором корпусе $\frac{3}{5} \cdot 27m = \frac{81}{5}m = \frac{81}{5} \cdot 35k = 567k$ студентов, $\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m = \frac{80}{7} \cdot 35k = 400k$ студенток и всего $967k$ человек.

По условию задачи $\begin{cases} 678k < 2500 \\ 967k > 2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3\dfrac{466}{678} \\ k > 2\dfrac{566}{967} \end{cases}$, следовательно, $k = 3$, а общее число обучающихся равно $678k + 967k = 1645k = 4935$.

**Ответ:** 4935.

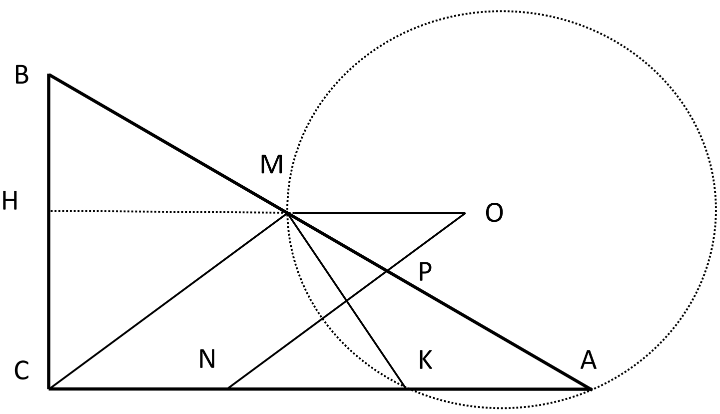
**Критерии**

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

**№2.** В треугольнике ABC угол C – прямой. Прямая MK перпендикулярна медиане CM и пересекает AC в точке K. Известно, что $\text{CK}:\text{KA} = 5:3$. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника MAK. Найдите площадь треугольника OBC, если $\text{BC} = 4$.

**Решение.**

По свойству медианы прямоугольного треунгольника $\text{CM} = \text{BM} = \text{AM} = x$. Пусть $\text{CK} = k$, $\text{KA} = n$. Треугольники ABC и CKM – прямоугольные и подобны по острому углу $\angle MAC = \angle MCA$ ($MCA$ – равнобедренный). Поэтому, $x : k = (k+n) : 2x$ или $x = \sqrt{\frac{k(k+n)}{2}}$.




По теореме синусов для треугольника MAK получем: $2R = \frac{MK}{Sin\angle MAC} = \frac{MK}{sin\angle MCA} = CK$, т.е. радиусы окружностей, описанных около треугольников MAK и CMK с ценрами в точках O и $N$ соответствено равны. Так как MK – общая хорда равных окружностей, то $NO$ – серединный перпендикуляр к ней и $NO = \sqrt{4R^2 - MK^2} = \sqrt{k^2 - CK^2 + CM^2} = CM$.

По условию задачи $\text{CM} \perp \text{MK} \Rightarrow \text{CM} \parallel \text{O}N \Rightarrow CMON$ – параллелограмм, т.е.

$\text{OM} = \text{C}N = k/2$, $\text{C}N \parallel \text{O}M \Rightarrow \text{OM} \perp BC$. Поэтому, OH – высота треугольника OBC и

$OH = OM + MH = OM + \frac{AC}{2} = R + \frac{k+n}{2} = \frac{k}{2} + \frac{k+n}{2} = k + \frac{n}{2}.$

По условию $k : n = 5 : 3$ => $OH = 1{,}3k$. Из исходного треугольника, по Теореме Пифагора ($BC = 4, AC = 1{,}6k, AB = 2x = 4k\sqrt{0{,}2}$): $16 + 2{,}26k^2 = 3{,}2k^2$ => $k^2 = 25$ => $k = 5$.

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}3 \cdot 5 = 13.$$

**Ответ:** 13.

## Критерии

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Доказано, что CMON – параллелограмм, |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

**№3.** При каких значениях параметра $a$ существует хотя бы одна пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая равенству $x^2 + 2y^2 + 3a^2 + xy + 2ax + 3ay - 10 = 0$?

Решение:

Перепишем уравнение как квадратное относительно $x$:

$x^2 + (2a + y)x + 2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10 = 0$,

$D = (2a + y)^2 - 4 \cdot (2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10) = -7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40$,

Уравнение имеет решения, если $D \geq 0$, то есть $-7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40 \geq 0$

или $7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40 \leq 0$ $(*)$.

Пусть $f(y) = 7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40$ - это квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Неравенство $(*)$ имеет решения, если значение функции $f(y)$ в вершине параболы неположительно, то есть

$f(y_в) = 7{y_в}^2 + 8ay_в + 8a^2 - 40 \leq 0$, $y_в = -\frac{4a}{7}$

$f(y_в) = \frac{40}{7}a^2 - 40 \leq 0$, что верно при $a^2 \leq 7$ или $a \in \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$.

Ответ: $a \in \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$.

**Критерии**

| Баллы | Критерии выставления |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует. |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий |

**№4(б).** По чертежам и данным задачи 4а, определите длину отрезка AE.

**Решение задачи 4б (КМиГ, деталь №3).**

1) Пусть $E_1$ - проекция точки E на плоскость ABC. По условию задачи 4а (см. файл деталь3) расстояние между плоскостями ABC и DEF равно 20. Следовательно, $EE_1 = 20$.
2) По чертежу на первой странице, расстояние от точки $E_1$ до прямой AB равно 20, а от проекции точки $E_1$ на прямую AB до точки A равно 10.
3) Таким образом, по теореме Пифагора, расстояние от точки $E_1$ до точки A равно $AE_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.
4) По теореме Пифагора для треугольника $AE_1E$,

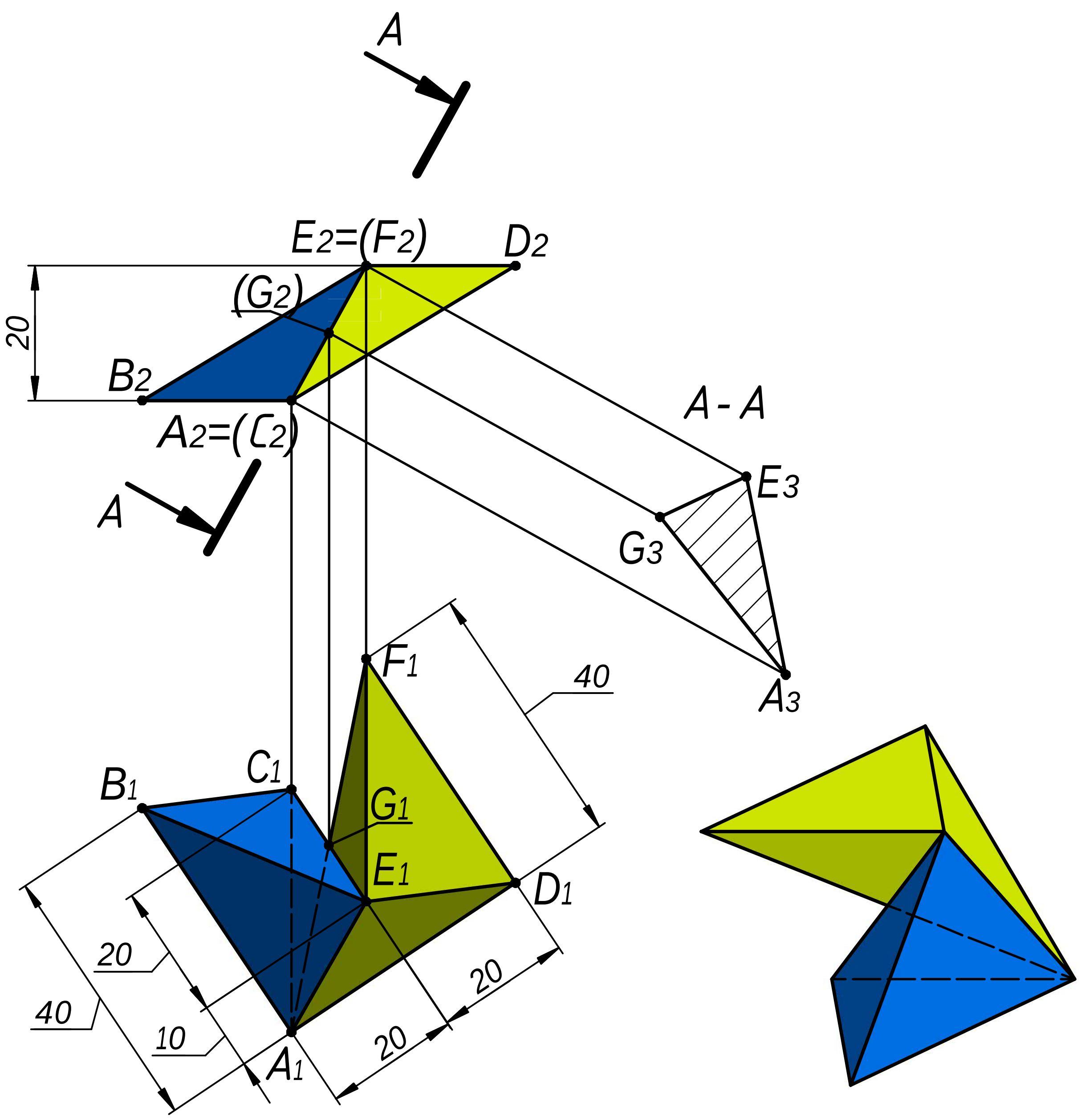
   $AE = \sqrt{AE_1{}^2 + EE_1{}^2} = \sqrt{500 + 20^2} = \sqrt{900} = 30$.

   **Ответ: 30.**

**Критерии**

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Верно найдено $AE_1$ или дважды правильно применена теорема Пифагора, но допущена арифметическая ошибка |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

*Задача 4а.*
*Даны две проекции треугольника АВС и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника АВС и выше ее на на 20 мм.*
*Требуется:*
*1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид АВСЕ и DEFA с соблюдением проекционной связи;*
*2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;*
*3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;*
*4) обозначить видимость ребер пирамид;*
*5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;*
*6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид .*

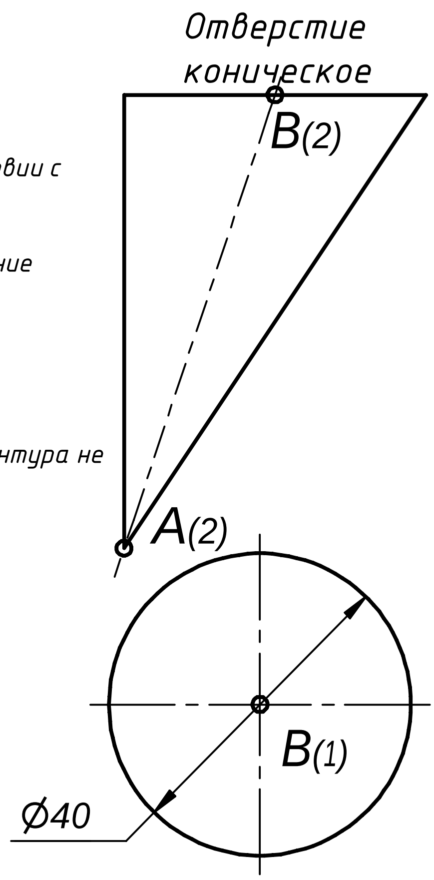


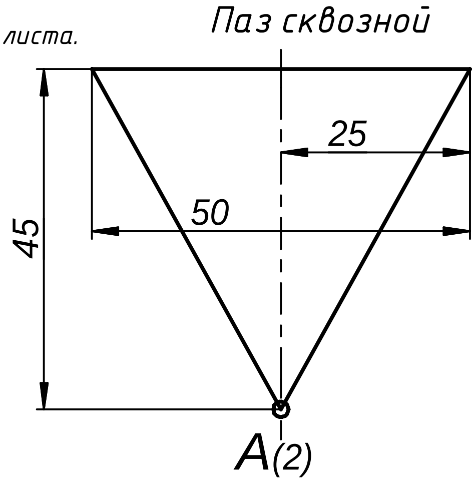
Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 3 класс: 9-11

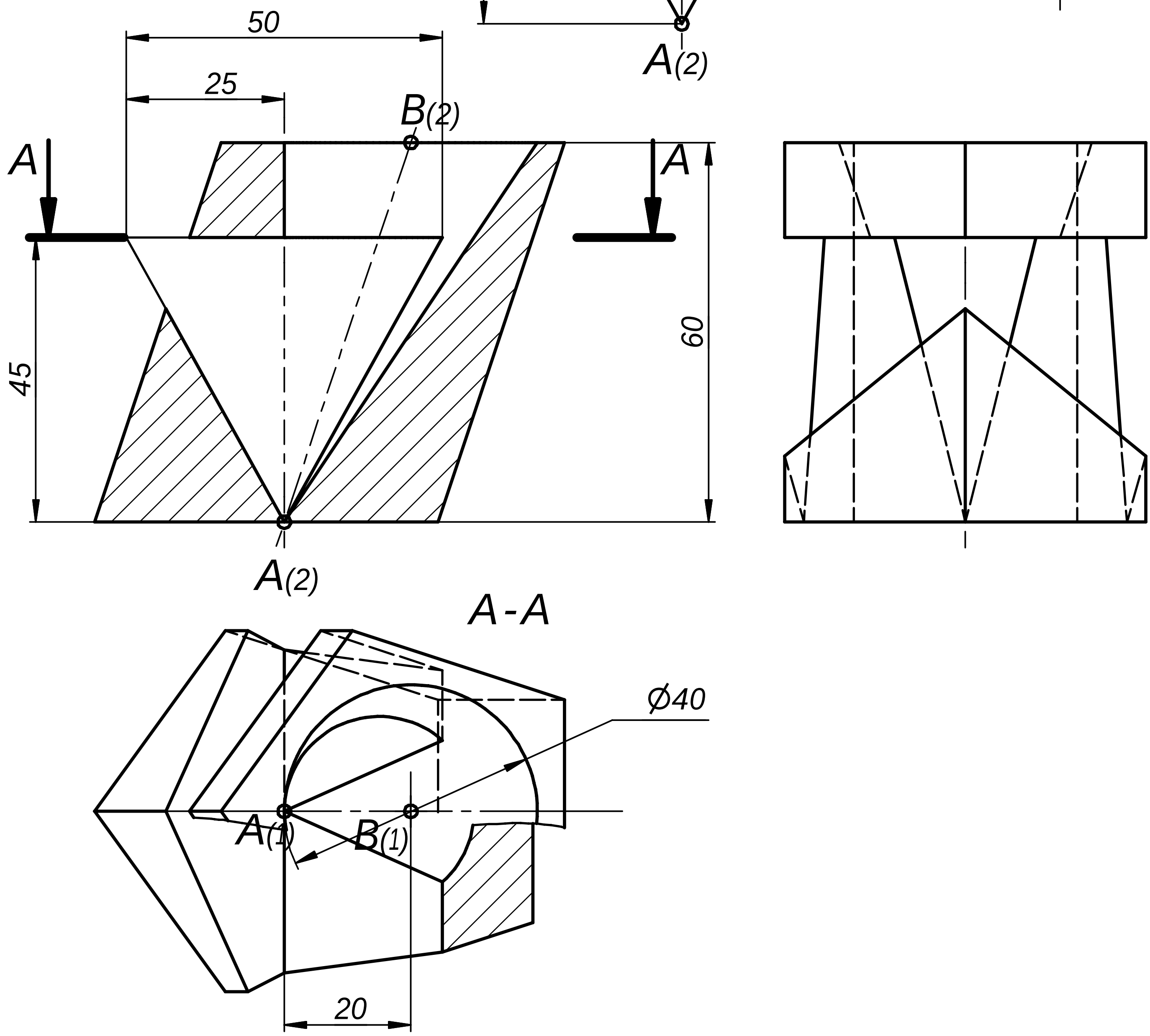
**Задача 5** (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.



**Компьютерное моделирование и графика;**

**тур по математике и инженерной графике**

**9-й класс**

**Вариант №3**

**№1.** Число девятиклассников, пишущих олимпиаду по математике, на 45% больше числа восьмиклассников. Школьников распределили по двум корпусам: в первом корпусе оказалось меньше 1000 человек, во втором – больше 1000. Сколько школьников писали олимпиаду во втором корпусе, если в нем оказались $\frac{1}{3}$ девятиклассников и $\frac{6}{7}$ восьмиклассников?

**Решение:** Пусть число восьмиклассников $n$, тогда девятиклассников $n\left(1+\frac{45}{100}\right)=\frac{29}{20}n$.

Число школьников в первом корпусе $\frac{2}{3}\cdot\frac{29}{20}\cdot n+\frac{1}{7}\cdot n=\frac{233}{210}n<1000$,

число школьников во втором корпусе $\frac{1}{3}\cdot\frac{29}{20}\cdot n+\frac{6}{7}\cdot n=\frac{563}{420}n>1000$,

следовательно, число $n$ кратно 420.

Получаем, что $746<n<902$, а учитывая кратность 420, $n=840$.

Число школьников во втором корпусе $\frac{563}{420}\cdot 840=1126$.

**Ответ:** 1126.

**Критерии**

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

**№2.** (10 баллов). В треугольнике ABC проведены три биссектрисы $AA_1, BB_1, CC_1$. Точки $N, K, M$ середины сторон $AB, BC$ и $AC$, соответственно. Прямые, проходящие через точку $N$ параллельно $BB_1$ и через точку $M$ параллельно $CC_1$ пересекаются в точке $N_1$. Прямые, проходящие через точку $N$ параллельно $AA_1$ и через точку $K$ параллельно $CC_1$ пересекаются в точке $K_1$.

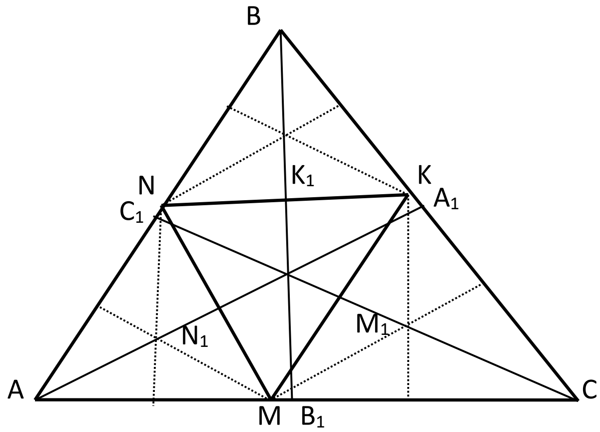
Прямые, проходящие через точку М параллельно $AA_1$ и через точку $K$ параллельно $BB_1$ пересекаются в точке $M_1$. Найдите площадь шестиугольника $NN_1MM_1KK_1$, если площадь треугольника ABC равна 144 см$^2$.

**Ответ:** 72 см$^2$.

**Решение.**

Очевидно, что треугольники $BNK, ANM, MKN$ и $KMC$ – равные (свойство медиан). Следовательно, $S_{MKN} = 0{,}25 \cdot S_{ABC}$, $BK_1, NK_1$ и $KK_1$, биссектрисы треугольника $BNK$, аналогично $AN_1, MN_1$ и $NN_1$, биссектрисы треугольника $ANM$, а $CM_1, KM_1$ и $MM_1$, биссектрисы треугольника $KMC$. Поэтому $S_{MM_1K} = S_{NK_1B}$, $S_{MN_1N} = S_{KK_1B}$ , то есть оставшиеся часть площади искомого шестиугольника равна площади треугольника $BNK$, но $S_{BKN} = 0{,}25 \cdot S_{ABC}$, следовательно, $S_{NN_1MM_1KK_1} = 0{,}5 \cdot S_{ABC} = 72$ см$^2$.

**Ответ:** 72 см$^2$.




## Критерии

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Найдено, что $BK_1$, $NK_1$ и $KK_1$, биссектрисы треугольника BNK или подобное этому. |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

**№3.** Найти все тройки чисел $(a;b;c)$ при которых уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет единственный корень $x=-2$, причём $a+b+c=5$.

**Решение:** Рассмотрим случай, когда уравнение является квадратным, то есть $a \neq 0$. Число $-2$ является решением уравнения, если выполняется равенство

$4a-2b+c=0$, квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант уравнения равен нулю. Получаем систему $\begin{cases} a+b+c=5 \\ 4a-2b+c=0 \\ b^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b=a+\dfrac{5}{3} \\ c=\dfrac{10}{3}-2a \\ \left(a+\dfrac{5}{3}\right)^2-4a\left(\dfrac{10}{3}-2a\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{20}{9} \\ c=\dfrac{20}{9} \\ a=\dfrac{5}{9} \end{cases}.$$

Рассмотрим случай, когда уравнение является линейным, то есть $a=0$. Число $-2$ является решением уравнения, если выполняется равенство $-2b+c=0$.

Получаем систему $\begin{cases} a=0 \\ -2b+c=0 \\ a+b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=2b=\dfrac{10}{3} \\ b=\dfrac{5}{3} \end{cases}.$

**Ответ:** $\left(0;\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{20}{9};\dfrac{20}{9}\right)$.

**Критерии**

| **Баллы** | **Критерии выставления** |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует. |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий |

**№4(б)** (10 баллов). Пусть точка M – середина отрезка DF. По данным задачи 4(а) и чертежам к этой задаче, найдите расстояние от точки M до отрезка EF.

**Решение.**

1) Исходя из данных чертежа $DF = 40$; $EE_0 = 40$. Тогда площадь треугольника $DEF$ $S_{DEF} = \frac{1}{2} EE_0 \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 800$ $мм^2$.
2) Исходя из данных чертежа, $FE_0 = FD - E_0D = 40 - 10 = 30$ *мм*, тогда по теореме Пифагора $EF = \sqrt{EE_0{}^2 + E_0F^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ *мм*.
3) $S_{DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot DD_0 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot DD_0 = 800 \Rightarrow DD_0 = \frac{800}{25} = 32$ *мм*.
4) $\Delta MM_0F$ подобен $\Delta DD_0F \Rightarrow \frac{MM_0}{DD_0} = \frac{MF}{DF} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

   $MM_0 = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$ *мм*.

   **Ответ: 16** *мм*.

**№4.**

| Баллы | Критерии выставления баллов |
|---|---|
| 10 | Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ |
| 5 | Обоснованно получен промежуточный результат (расстояние от точки D до прямой EF, либо синус угла EFD, либо другой важный результат |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев |

*Задача 4а.*

*Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на на 40 мм.*

*Требуется:*

*1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCD и DEFA с соблюдением проекционной связи;*

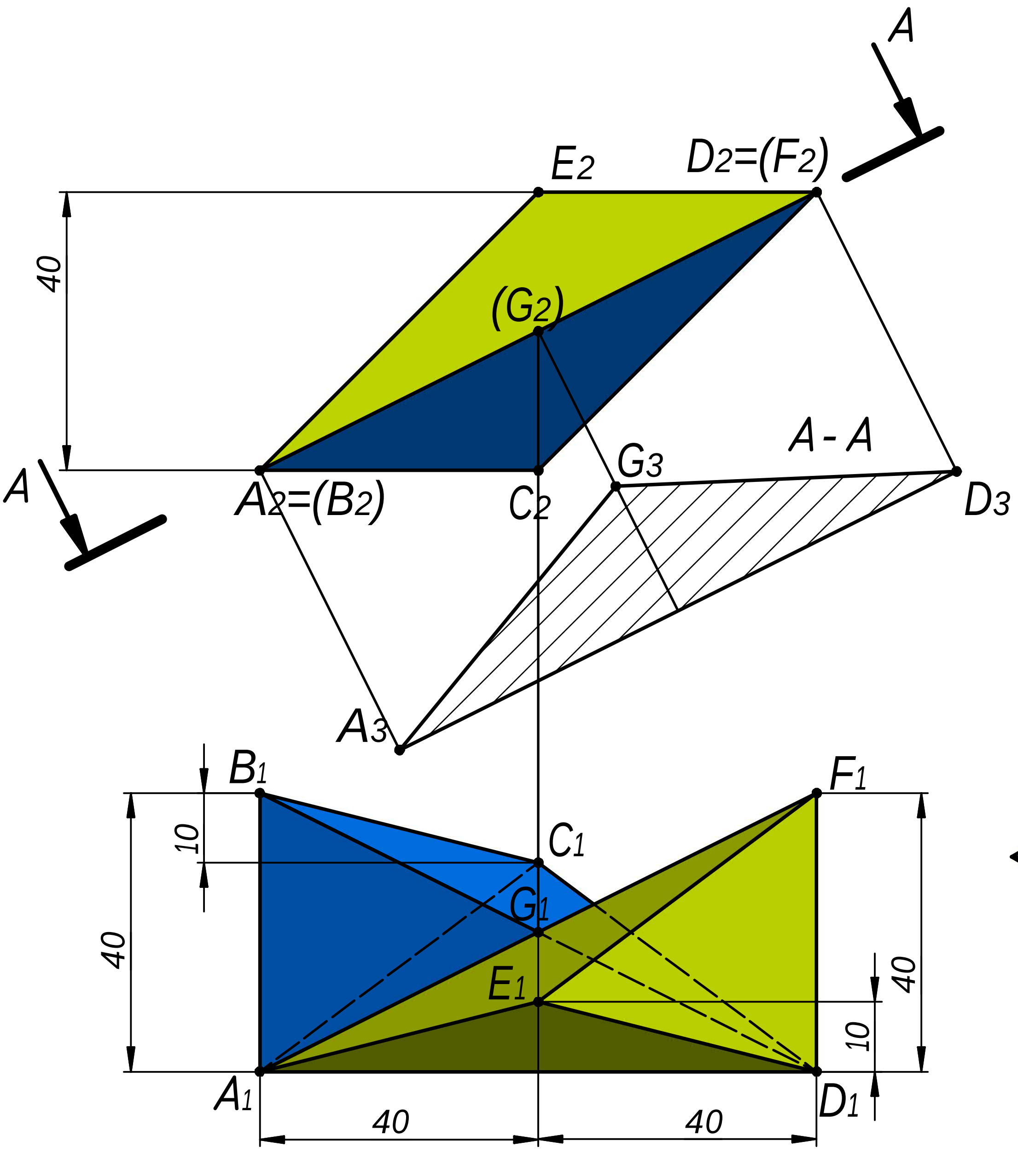
*2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;*

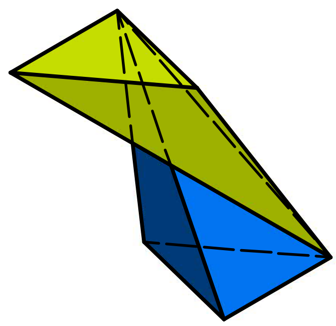
*3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;*

*4) обозначить видимость ребер пирамид;*

*5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;*

*6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид .*

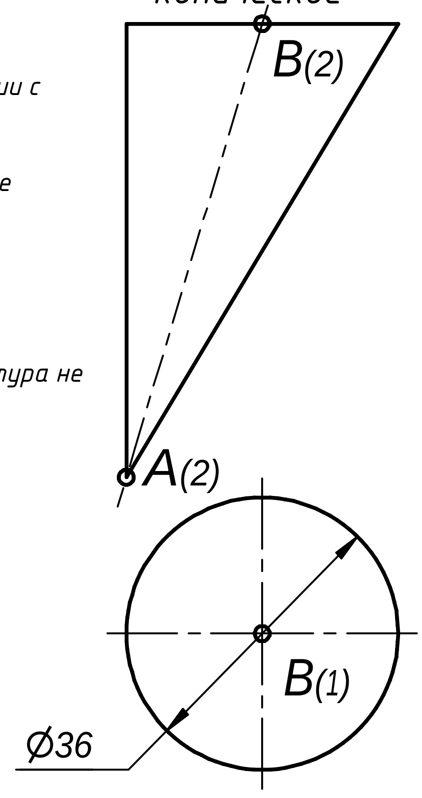


*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;*
*тур по математике и инженерной графике.*
*Вариант: 1 класс: 7-11*

***Задача 5*** *(15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:*
*1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;*
*2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;*
*3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А*
*4) главный вид оформить фронтальным разрезом;*
*5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;*
*6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;*
*7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;*
*8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*
*Все построения выполнить на обратной стороне листа.*

*Отверстие коническое*




*Паз сквозной*