Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

9-й класс

№1: Комбинаторика.

4. В коробке лежат 3 белых чашки, 3 красных чашки и 2 черных чашки. Соня достала из коробки 5 чашек наугад. Какова вероятность, что она достала 2 белых, 2 красных и 1 черную чашку? (Ответ округлите до сотых).

Решение:
Белые чашки обозначим как Б, красные как К, черные как Ч.
1) Вероятность достать 2 белых, затем 2 красных, затем 1 черную чашку, то есть ББККЧ (именно в таком
порядке): $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{280}$
2) Количество способов, которыми мы можем переставить буквы в буквосочетании ББККЧ - это:

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

3) $\frac{30\cdot 3}{280}=\frac{9}{28}$

Ответ: 0,32

№2: Параметр.

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\left(\left|\frac{ax^2-ax-12a+x^2+x+12}{ax+3a-x-3}\right|-a\right)\cdot|4a-3x-19|=0$$

имеет одно решение. В ответе запишите наибольшее значение параметра *a*

Решение:
Упростим $\frac{ax^2-ax-12a+x^2+x+12}{ax+3a-x-3}=\frac{ax^2-x^2+(-ax+x)+(-12a+12)}{a(x+3)-(x+3)}=$

$$=\frac{x^2(a-1)-x(a-1)-12(a-1)}{(x+3)(a-1)}=\frac{(a-1)(x^2-x-12)}{(x+3)(a-1)}=$$

$$=\frac{x^2+3x-4x-12}{x+3}=\frac{(x+3)(x-4)}{x+3}=x-4$$

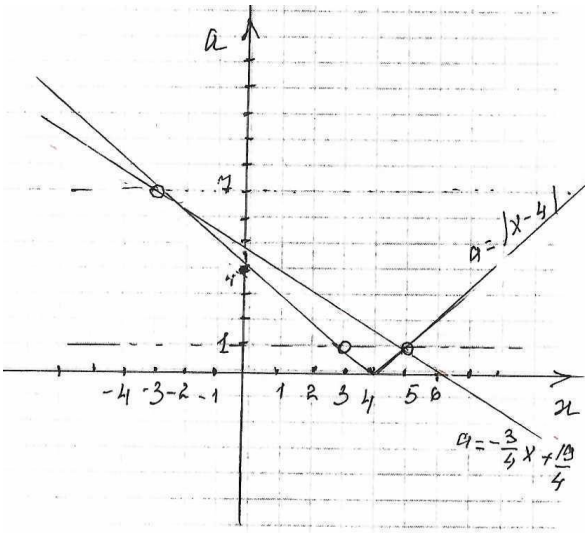
Получим $\begin{cases}(|x-4|-a)\cdot|4a+3x-19|=0\\ a\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}|x-4|-a=0\\ 4a+3x-19=0\end{array}\right.\\ a\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$;

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=|x-4|\\ a=-0{,}75x+4{,}75\end{array}\right.\\ a\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$$

Построим график в системе координат xOa

$a = -0{,}75x + 4{,}75$ – прямая

x	-3	5
y	7	1



$a = |x - 4|$ график получим из $a = |x|$ смещением на 4 ед.отр. вправо

Т.к. $x \neq -3$, то $a \neq 7$

$a \neq 1$, то $x \neq 3; x \neq 5$

Точки (-3; 7); (3; 1); (5; 1) – выколотые

При $a \in (-\infty; 0) \cup \{7\}$ – одно решение

При $a \in (0; 1) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$ – три решения

При $a = 0$ два решения

При $a = 1$ нет решений

Ответ: 7

№3: Треугольники.

1. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно. **Ответ:** 10

№4: Свойства чисел.

2. При сложении двух натуральных чисел Алёша случайно приписал лишнюю цифру, поэтому вместо числа 23456 он получил число 55555. Определите какое число случайно приписал Алёша.

решение.

Пусть Алёша складывал числа x и y. Когда он к одному из них (пусть к x) приписал лишнюю цифру a, то число стало равно $10x+a$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 23456; \\ (10x + a) + y = 55555 \end{cases}$ <=> $9x + a = 32099$ <=> $9x = 32099 - a$ <=> $a = 5$ <=> $9x = 32094$

<=> $x = 3566$ <=> $y = 19890$. **ответ:** 5;

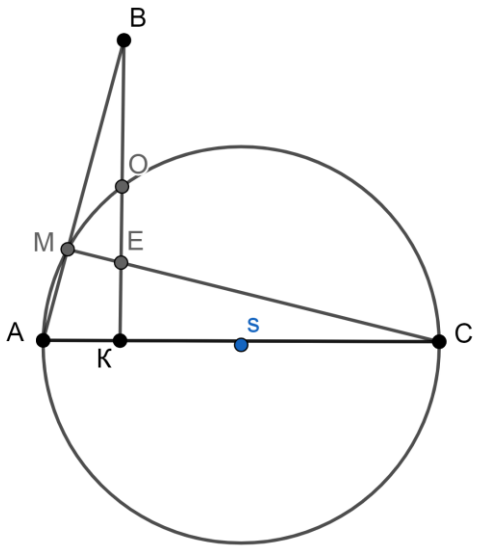
№5: Проценты.

Фляга наполнена 96%-ным раствором соляной кислоты. Из неё отлили 12 л кислоты и дополнили флягу водой. Затем из фляги отлили ещё18 л и снова дополнили её водой, после чего концентрация кислоты во фляге составила 32%. Найдите объём фляги.

Ответ: 36 л

№6: Планиметрия.

№2. Из точек B и C острого угла BAC проведены перпендикуляры CM и BK, пересекающиеся в точке E, так, что точка M лежит на AB, а K лежит на AC. Через точки A, M и C проведена окружность, пересекающая BK в точке O, причём BE = 17, OK = 72. AK: KC=1:4. Найдите тангенс угла BAC. (отношение BK к AK).



Решение.

1) Пусть OE=x $\Rightarrow$ BO=BE-OE=17=x и BK=BO+OK=17-x+72=89-x.

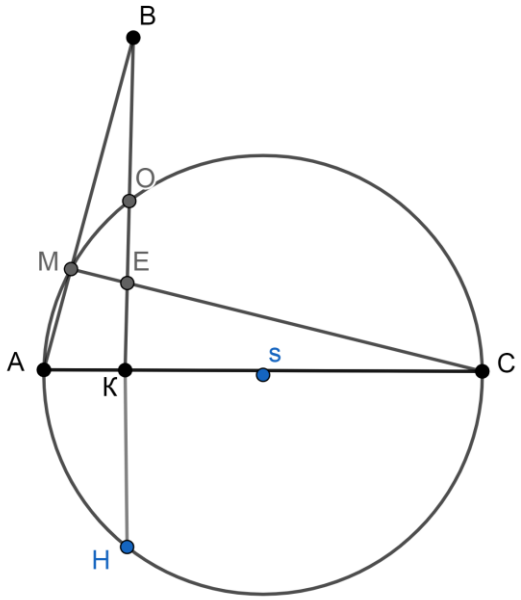
2) BK$\perp$AC$\Rightarrow$KO=KH=72$\Rightarrow$BH= BO+OH=17-x+144=161-x.

3) $\triangle$ABK$\sim\triangle$EMB $\Rightarrow$ BM/BK=BE/AB$\Rightarrow$BM$\cdot$AB=BK$\cdot$BE.

4) BA и BE – секущие $\Rightarrow$ BM$\cdot$AB=BO$\cdot$BH.

5) Из (3 и 4) $\Rightarrow$ BO$\cdot$BH= BK$\cdot$BE$\Rightarrow$ (17-x) (161-x)= (89-x)17$\Rightarrow$$x^2-161x$+1224=0$\Rightarrow$$x$=8 или x=153 $\Rightarrow$OE=8; BO=9; BK=81.

6) AK$\cdot$KC=KO$\cdot$KH $\Rightarrow$4AK^2=72^2 $\Rightarrow$AK=36$\Rightarrow$BK/AK=81/36=2,25.



Ответ: 2,25.

№7: Теория чисел.

Найдите наименьшее натуральное n, для которого 1999! не делится на 34^n. (n!=1·2·3·...·n)

Решение:
34=2·17. Узнаем, в какой степени число 17 войдет в разложение 1999! (2 - очевидно войдет в данное разложение в большей степени). $117 < \frac{1999}{17} < 118$; $6 < \frac{1999}{17^2} < 7$ отсюда, 17 входит в 1999! 123 раза, а чтобы не делилось добавим еще 1.

Ответ: 124

№8: Параметр.

2. Определите, при каких a, система $x+y-144=0$, $xy-5184-0{,}1a^2=0$ имеет одно решение. **ответ:** 0.

решение. $\begin{cases} x+y=144 \\ xy=5184+0{,}1a^2 \end{cases}$ значит, x и y равны корням квадратного уравнения

p^2-144p+ (5184 +0,1a^2)=0 поэтому, D=72^2-(5184 +0,1a^2)= -0,1a^2. Следовательно, уравнение может иметь решение только при a=0. p=72 следовательно x=y=72. **ответ:** 0.

№9: Делимость.

Найдите наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022 и делящих нацело число $2021!! + 2022!!$. (Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность: $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \ldots$)

Ответ. 2023.

Решение.

Докажем, что $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Действительно,

$$2022!! = (2023-1)(2023-3)(2023-5)\ldots(2023-2021),$$

остаток от деления этого числа на 2023 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5)\ldots(-2021) = (-1)^{\frac{2022}{2}} \cdot 2021!! = -2021!!$$

на 2023. Следовательно, $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Так как 2023 – это наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022, то получаем ответ.

Ответ. 2023.