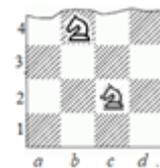
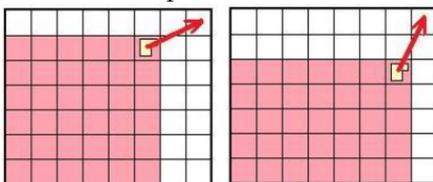


Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. На шахматную доску, состоящую из 8×7 клеток, поставили двух белых коней. С какой вероятностью они будут находиться под защитой друг друга? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (10 баллов)

**Решение:**

Решение. Сосчитаем количество позиций, где тот белый конь, который стоит левее, защищает другого по каждому из 4 возможных векторов.



Чтобы защищать по вектору $(2;1)$ (рис. слева), конь должен стоять на одной из $6 \cdot 6 = 36$ закрашенных клеток, при этом позиция другого коня определяется однозначно; аналогичная картина для вектора $(2; -1)$.

Чтобы защищать по вектору $(1;2)$ (рис. справа), конь должен стоять на одной из $7 \cdot 5 = 35$ закрашенных клеток, при этом позиция другого коня определяется однозначно; аналогичная картина для вектора $(1; -2)$.

Вычислим вероятность, разделив число найденных позиций на число всех позиций двух одинаковых коней:

$$P = \frac{2 \cdot 36 + 2 \cdot 35}{C_{56}^2} = \frac{2 \cdot 71}{56 \cdot 55 / 2} = \frac{71}{14 \cdot 55}$$

Ответ: $71/770$.

2. В остроугольный треугольник ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 9,5$ вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон BC и AB в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OCK равен 60° . Найдите площадь четырехугольника $BOCK$, если площадь треугольника ABC равна $21\sqrt{3}$. (10 баллов)

Решение.

Используя формулу $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \beta$, $\beta = \angle ABC$, найдем угол β : $21\sqrt{3} = \frac{19 \cdot 8}{4} \sin \beta$,

$$\sin \beta = \frac{21\sqrt{3}}{38}, \quad \cos \beta = \frac{11}{38}.$$

По теореме косинусов найдем сторону AC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \beta = 64 + 361/4 - 44 = 441/4, \quad AC = 10,5. \text{ Используя формулу}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha, \quad \alpha = \angle BAC,$$

$$\text{найдем угол } \alpha: 21\sqrt{3} = \frac{21 \cdot 8}{4} \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Проведем прямую CD , $CD \perp AB$, D - точка пересечения с прямой MN .

Треугольники BMN и CMD - подобные равнобедренные треугольники. Если CK_1 - биссектриса

$$\text{треугольника } MCD, \text{ то } \angle OCK_1 = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ, \text{ и } K_1 = K.$$

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC :

$$S_{ABC} = 21\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC}r}{2} = \frac{(AB + BC + AC)r}{2} = 14r, \quad r = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Тогда}$$

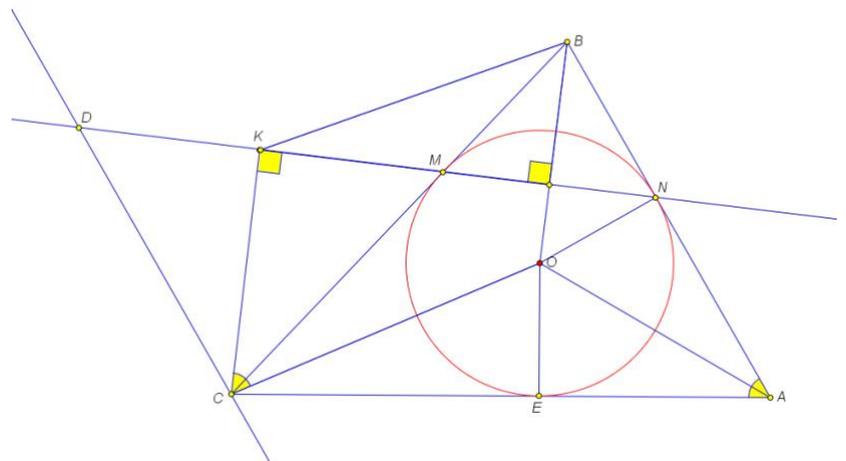
$$AN = r/\operatorname{tg} 30^\circ = 4,5, \quad BN = BM = 3,5, \quad CM = 6.$$

$$\text{Тогда } MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \cdot BN \cos \beta = \frac{49}{2} - \frac{49 \cdot 11}{76} = \frac{49 \cdot 27}{76}, \quad MN = \frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$$

$$\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{BM} = \frac{12}{7}, \quad KM = \frac{DM}{2} = \frac{6MN}{7} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{19}}. \text{ Четырехугольник } BOCK - \text{ трапеция с высотой}$$

$$h = KM + \frac{MN}{2} = \frac{19MN}{14} = \frac{3\sqrt{57}}{4}. \text{ Найдем основания трапеции:}$$

$$CK = \sqrt{CM^2 - KM^2} = \sqrt{36 - \frac{81 \cdot 3}{19}} = 3\sqrt{4 - \frac{27}{19}} = \frac{21}{\sqrt{19}}, \quad BO = \sqrt{r^2 + BN^2} = \frac{\sqrt{27 + 49}}{2} = \sqrt{19}.$$



$$S_{\text{бок}} = \frac{CK + BO}{2} h = \left(\frac{21}{\sqrt{19}} + \sqrt{19} \right) \cdot \frac{3\sqrt{57}}{8} = 15\sqrt{3}. \text{ Ответ: } 15\sqrt{3}.$$

3. Найдите все действительные значения x , которые являются решениями неравенства $\log_{9x^2-x^4}(9a-ax^2) \leq 1$ при любых $a \in (0; 4)$. (12 баллов)

Решение:

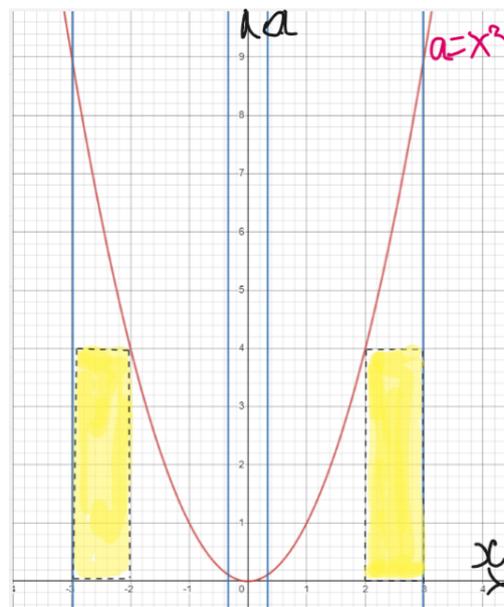
$$\begin{cases} 9x^2 - x^4 > 0, \\ 9x^2 - x^4 \neq 1, \\ 9a - ax^2 > 0, \\ (9x^2 - x^4 - 1)(9a - ax^2 - 9x^2 + x^4) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(9 - x^2) > 0, \\ x^4 - 9x^2 + 1 \neq 0, \\ a(9 - x^2) > 0, \\ (x^4 - 9x^2 + 1)(x^2 - 9)(x^2 - a) \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; 0) \cup (0; 3), \\ x \neq \pm \sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}}, \\ a > 0, \\ (x^4 - 9x^2 + 1)(x^2 - a) \leq 0. \end{cases}$$

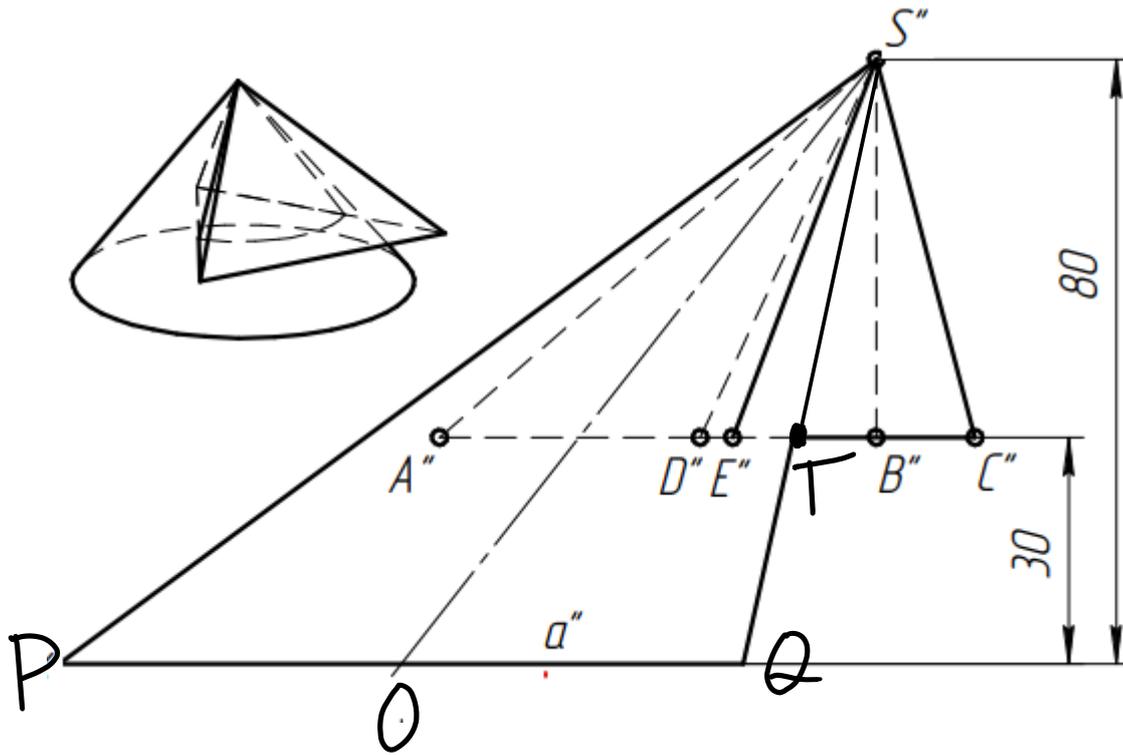
При любых $a \in (0; 4)$ данной системе удовлетворяют

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}}; -2 \right] \cup \left[2; \sqrt{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}} \right).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}}; -2 \right] \cup \left[2; \sqrt{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}} \right).$



5. Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABC$, основанием которой является равносторонний треугольник ABC со стороной 75 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм, высота пирамиды равна 50 мм. Точки A', B', C', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса. Точка S'



$$S_{S''PQ} = \frac{90 \cdot 80}{2} = 3600,$$

$$B''C'' = 75 \sin 10^\circ = 75 \cos 80^\circ = 75(2 \cos^2 40^\circ - 1) = 75 \cdot 0,28 = 21$$

$$TB'' = \frac{5}{8}(OM - 45) = \frac{5}{8}(65 - 45) = 12,5$$

$$TC'' = 12,5 + 21 = 33,5, \quad S_{S''TC''} = \frac{33,5 \cdot 50}{2} = 837,5$$

$$S = S_{S''PQ} + S_{S''TC''} = 3600 + 837,5 = 4437,5$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{521}}{2}$ мм, 4437,5 мм²

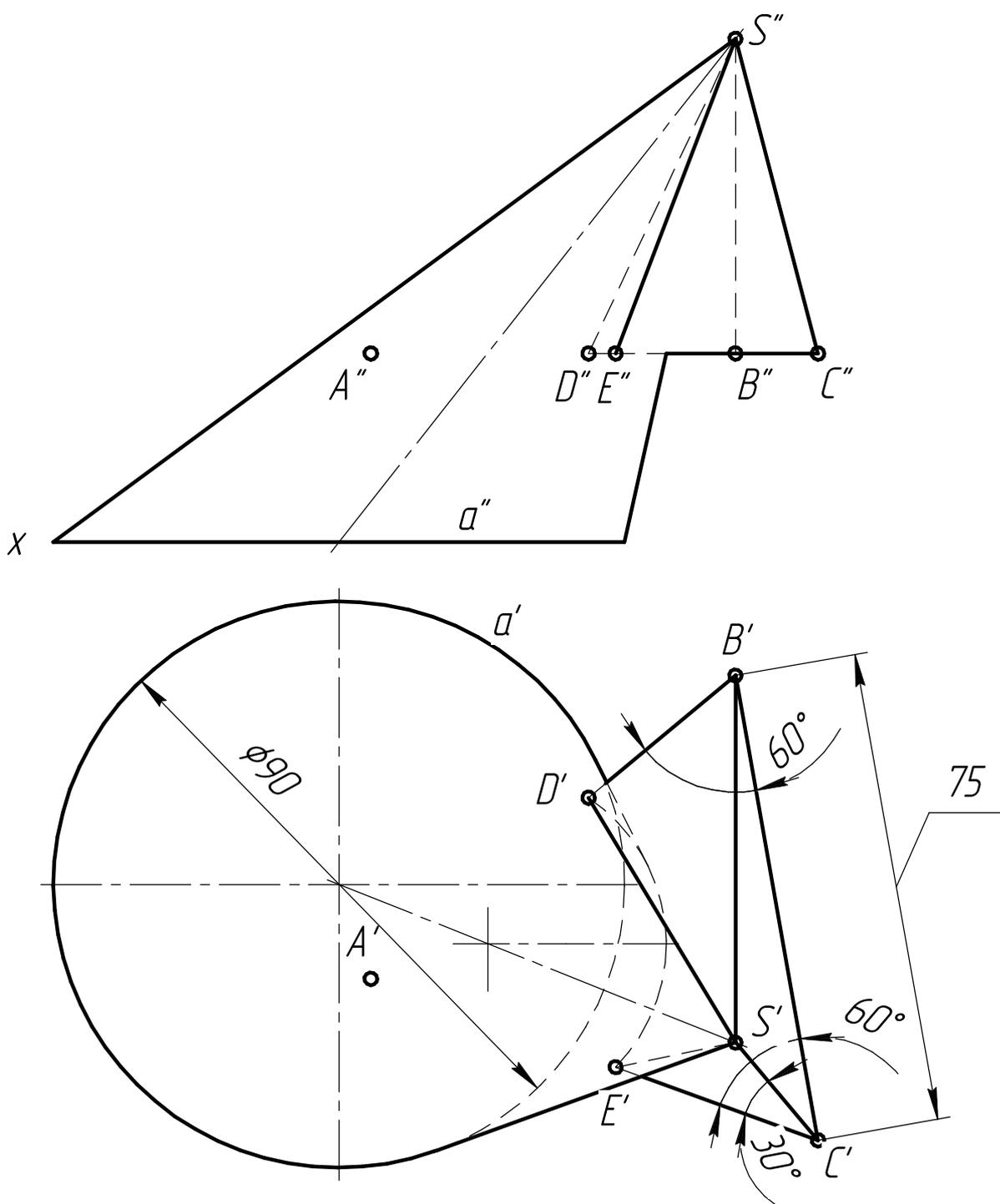
Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

Вариант: 2

класс: 10–11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса a' и вершин основания пирамиды $A'B'C'$. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм. Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
- 3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
- 4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



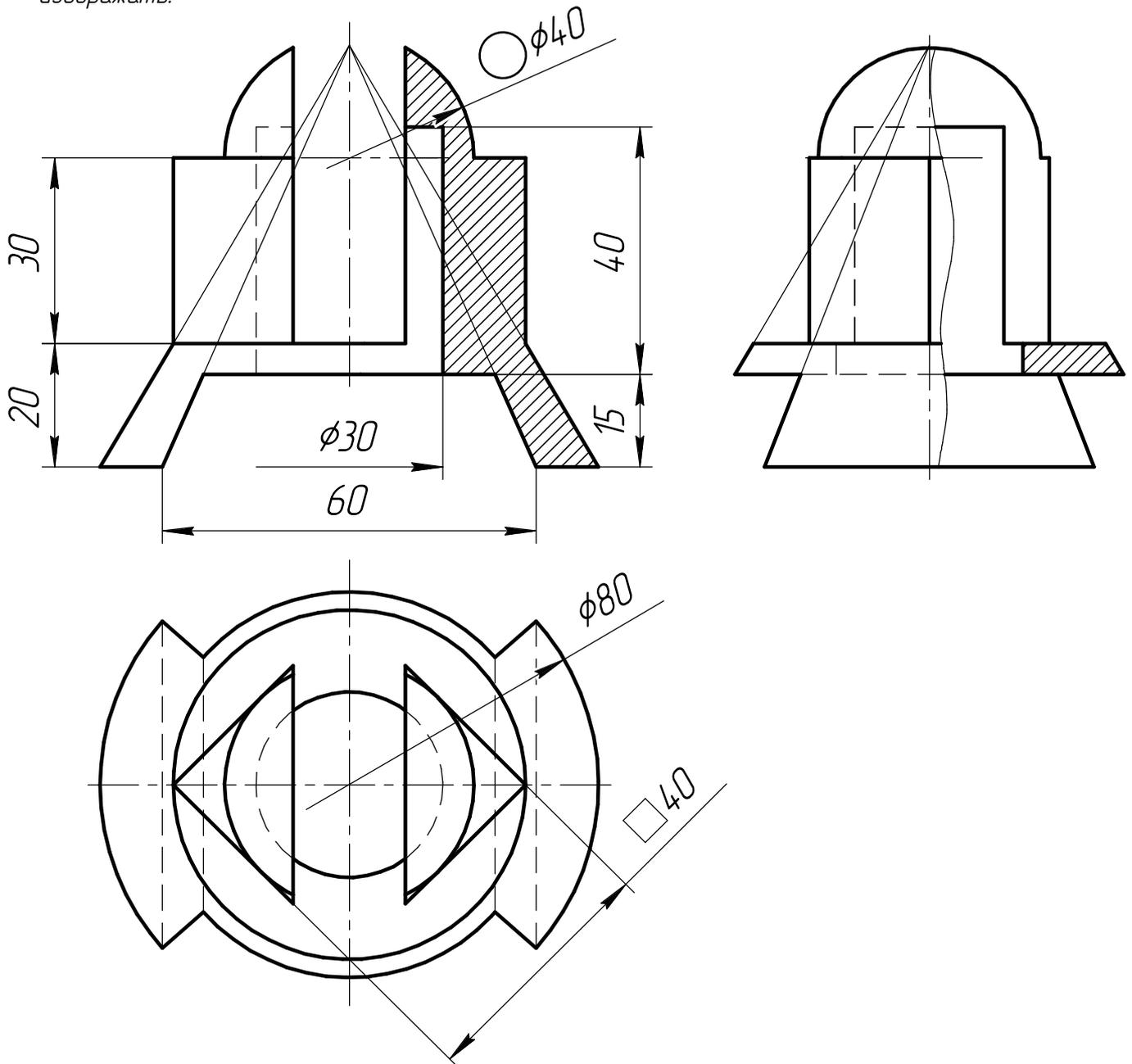
№	Критерии задача 4а	Да	Нет
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2	-
2	Построена линия пересечения фигур	2	-
3	Определена видимость очерка конуса	1	-
4	Определена видимость очерка пирамиды	1	-
5	Определена видимость участков линии пересечения	2	-
6	Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2	-
	Итого	до 10	

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10-11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

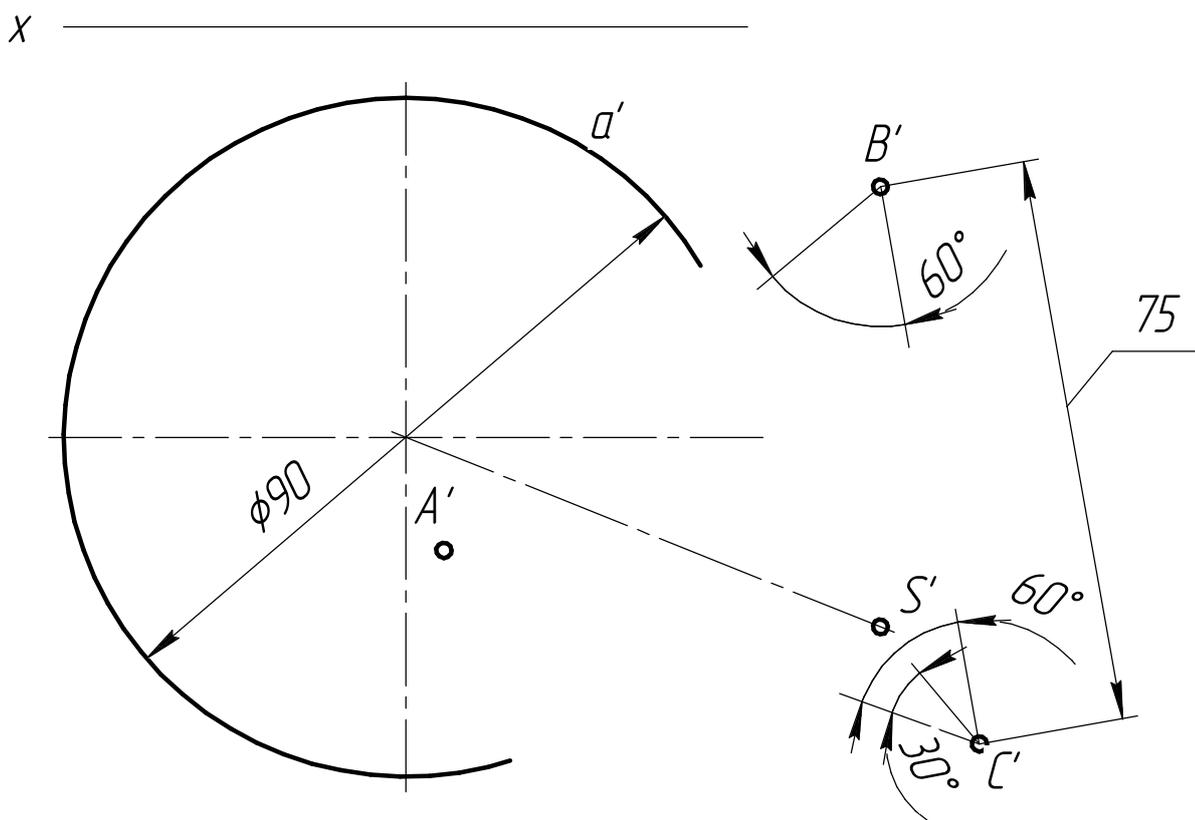


№	Критерии задача 6 (Вариант №1)	Да	Нет
1	Общие требования:		
	Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4	-
2	Главный вид		
	Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	4	-
3	Вид слева		
	Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	5	-
4	Вид сверху		
	Вид сверху выполнен без разреза (учитывать только при выполнении пункта 1)	2	-
5	Указание размеров		
	Обозначены более половины необходимых размеров	4	-
6	Оформление		
	Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1	-
	Итого	до 20	



Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса a' и вершин основания пирамиды $A'B'C'$. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм. Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
- 3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.

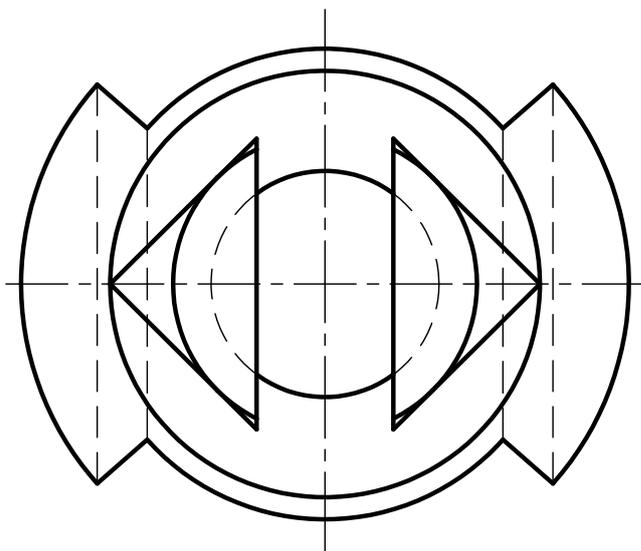
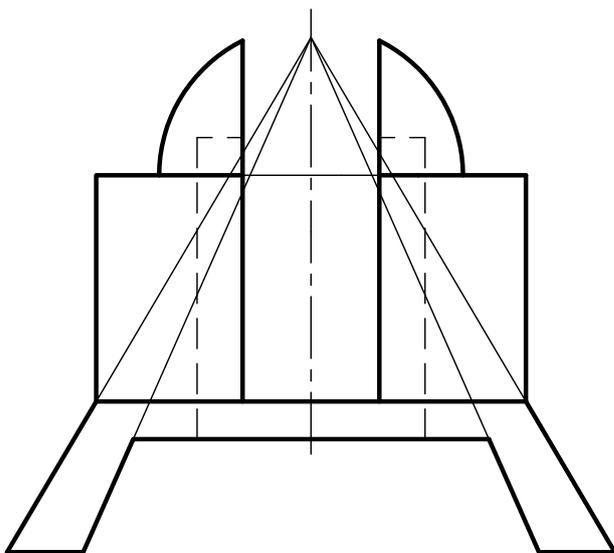




Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

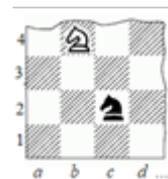
Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;*
- 3) все изображения оформить в соответствии с ЕСКД;*
- 4) нанести размеры, причем их количество должно быть минимальное, но однозначно определяющее форму фигуры;*
- 5) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*



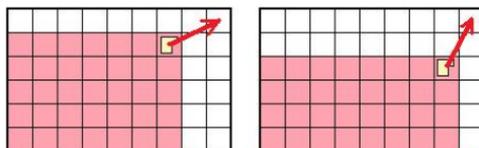
Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

1. На шахматную доску, состоящую из 9×6 клеток, поставили двух коней – белого и черного. С какой вероятностью они будут угрожать один другому? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (10 баллов)



Решение:

Решение. Сосчитаем количество позиций, где белый конь нападает на черного по каждому из 8 возможных векторов.



Чтобы нападать по вектору $(2;1)$ (рис. слева), белый конь должен стоять на одной из $7 \cdot 5 = 35$ закрашенных клеток, при этом позиция черного коня определяется однозначно; аналогичная картина для векторов $(2; -1)$, $(-2; 1)$ и $(-2; -1)$.

Чтобы нападать по вектору $(1;2)$ (рис. справа), белый конь должен стоять на одной из $8 \cdot 4 = 32$ закрашенных клеток, при этом позиция черного коня определяется однозначно; аналогичная картина для векторов $(1; -2)$, $(-1; 2)$ и $(-1; -2)$.

Вычислим вероятность, разделив число найденных позиций на число всех позиций двух разных коней:

$$P = \frac{4 \cdot 35 + 4 \cdot 32}{A_{54}^2} = \frac{4 \cdot 67}{54 \cdot 53} = \frac{2 \cdot 67}{27 \cdot 53}$$

Ответ: $134/1431$.

2. В остроугольный треугольник ABC со сторонами $AB = 16$, $AC = 21$ вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон BC и AB в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OCK равен 60° . Найдите площадь четырехугольника $BOCK$, если площадь треугольника ABC равна $84\sqrt{3}$. (10 баллов)

Решение.

Используя формулу

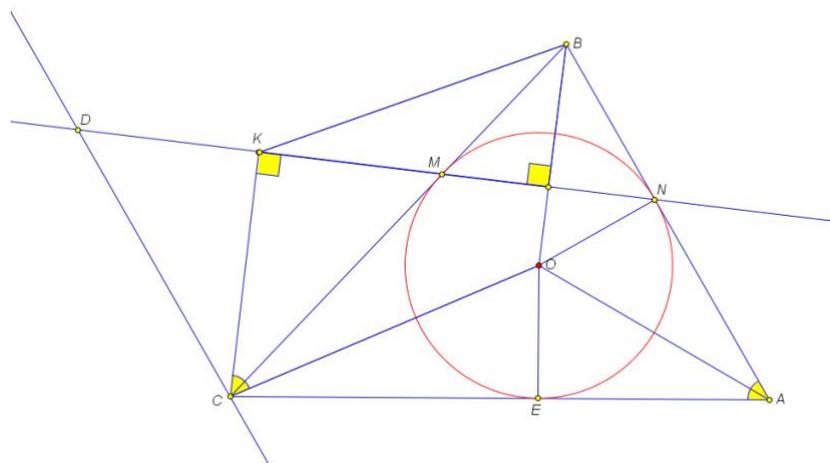
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha, \alpha = \angle BAC,$$

найдем угол α : $84\sqrt{3} = \frac{21 \cdot 16}{2} \sin \alpha,$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = 60^\circ. \text{ По теореме}$$

косинусов найдем сторону BC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha = 441 + 256 - 336 = 361, BC = 19.$$



Проведем прямую CD , $CD \perp AB$, D - точка пересечения с прямой MN . Треугольники BMN и CMD - подобные равнобедренные треугольники. Если CK_1 - биссектриса треугольника MCD ,

то $\angle OCK_1 = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$, и $K_1 = K$.

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC :

$$S_{ABC} = 84\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC}r}{2} = \frac{(AB + BC + AC)r}{2} = 28r, \quad r = 3\sqrt{3}. \text{ Тогда}$$

$$AN = r/\operatorname{tg} 30^\circ = 9, \quad BN = BM = 7, \quad CM = 12.$$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ABC = \beta$: $\cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{256 + 361 - 441}{2 \cdot 16 \cdot 19} = \frac{11}{38}$.

Тогда $MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \cdot BN \cos \beta = 98 - \frac{98 \cdot 11}{38} = \frac{49 \cdot 27}{19}$, $MN = \frac{21\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$,

$$\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{BM} = \frac{12}{7}, \quad KM = \frac{DM}{2} = \frac{6MN}{7} = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{19}}. \text{ Четырехугольник } BOCK \text{ – трапеция с высотой}$$

$$h = KM + \frac{MN}{2} = \frac{19MN}{14} = \frac{3\sqrt{57}}{2}. \text{ Найдем основания трапеции:}$$

$$CK = \sqrt{CM^2 - KM^2} = \sqrt{144 - \frac{324 \cdot 3}{19}} = 6\sqrt{4 - \frac{27}{19}} = \frac{42}{\sqrt{19}}, \quad BO = \sqrt{r^2 + BN^2} = \sqrt{27 + 49} = 2\sqrt{19}.$$

$$S_{BOCK} = \frac{CK + BO}{2} h = \left(\frac{21}{\sqrt{19}} + \sqrt{19} \right) \cdot \frac{3\sqrt{57}}{2} = 60\sqrt{3}. \text{ Ответ: } 60\sqrt{3}.$$

3. Найдите все действительные значения x , которые являются решениями неравенства $\log_{4x^2-x^4}(4a - ax^2) \leq 1$ при любых $a \in (0; 1)$. (12 баллов)

Решение:

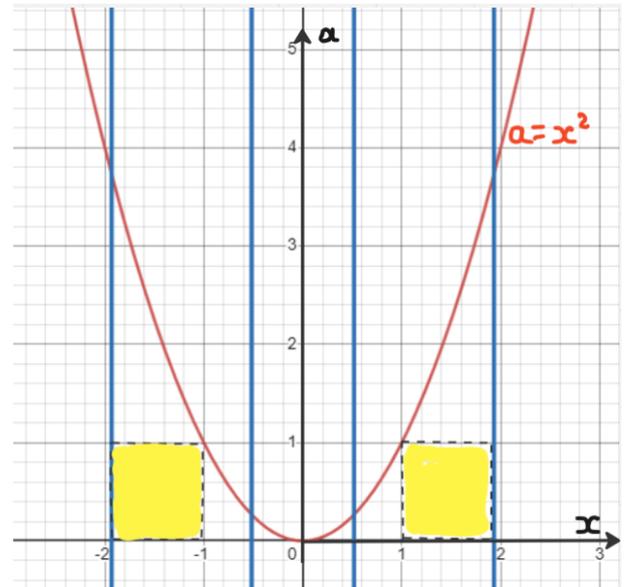
$$\begin{cases} 4x^2 - x^4 > 0, \\ 4x^2 - x^4 \neq 1, \\ 4a - ax^2 > 0, \\ (4x^2 - x^4 - 1)(4a - ax^2 - 4x^2 + x^4) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(4 - x^2) > 0, \\ x^4 - 4x^2 + 1 \neq 0, \\ a(4 - x^2) > 0, \\ (x^4 - 4x^2 + 1)(x^2 - 4)(x^2 - a) \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 0) \cup (0; 2), \\ x \neq \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ a > 0, \\ (x^4 - 4x^2 + 1)(x^2 - a) \leq 0. \end{cases}$$

При любых $a \in (0; 1)$ данной системе
удовлетворяют

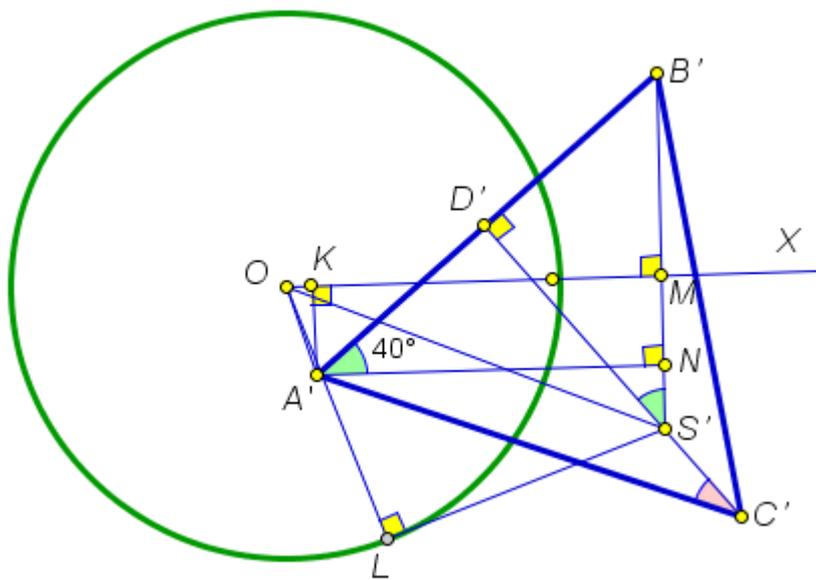
$$x \in \left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -1\right] \cup \left[1; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -1\right] \cup \left[1; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$



5. Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABC$, основанием которой является равносторонний треугольник ABC со стороной 75 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм, высота пирамиды равна 50 мм. Точки A', B', C', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса. Точка S' лежит на высоте $C'D'$ треугольника $A'B'C'$. Прямая OX перпендикулярна прямой $S'B'$, угол между прямыми OX и $A'C'$ составляет 20° , расстояние от точки A' до прямой OX равно 15 мм, $OA' = 5\sqrt{10}$ мм. Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки S' к основанию конуса, и площадь объединенной фронтальной проекции двух фигур (см. условие задачи 4). (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Решение:



$$A'N \perp OX, N \in B'S', \Delta A'NB' \text{ прямоугольный} \Rightarrow NB' = 75 \sin 40^\circ = 45.$$

$$\Delta D'S'B' \text{ прямоугольный} \Rightarrow S'B' = 75 / (2 \sin 40^\circ) = 62,5.$$

$$NS' = S'B' - NB' = 62,5 - 45 = 17,5.$$

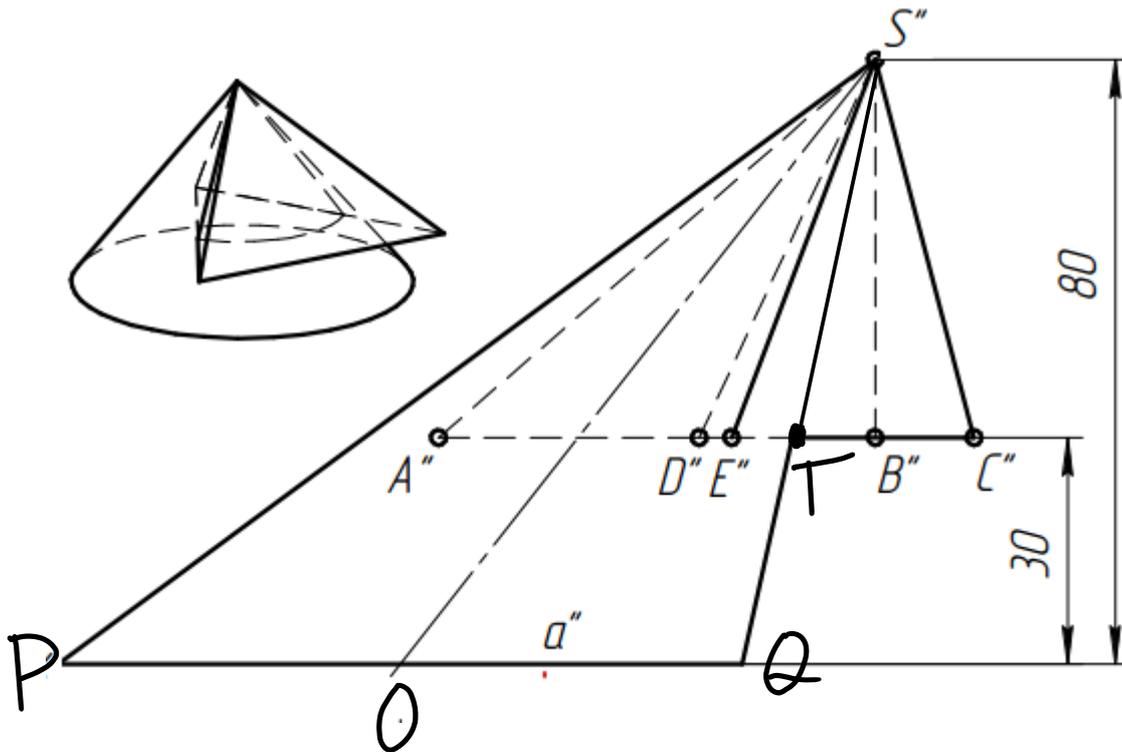
$$A'K \perp OX, K \in OX, A'K = 15. M = OX \cap B'S', MS' = 15 + 17,5 = 32,5.$$

$$A'N = 75 \cos 40^\circ = 60, OK = 5, OM = 5 + 60 = 65.$$

$$\triangle OMS' \text{ прямоугольный} \Rightarrow OS'^2 = OM^2 + MS'^2 = 65^2 + 32,5^2 = 5281,25.$$

$$\triangle OS'L \text{ прямоугольный} \Rightarrow LS'^2 = OS'^2 - OL^2 = 5281,25 - 2025 = 3256,25.$$

$$LS'^2 = \frac{13025}{4} = \frac{25 \cdot 521}{4}, LS' = \frac{5\sqrt{521}}{2}.$$



$$S_{S''PQ} = \frac{90 \cdot 80}{2} = 3600,$$

$$B''C'' = 75 \sin 10^\circ = 75 \cos 80^\circ = 75(2 \cos^2 40^\circ - 1) = 75 \cdot 0,28 = 21$$

$$TB'' = \frac{5}{8}(OM - 45) = \frac{5}{8}(65 - 45) = 12,5$$

$$TC'' = 12,5 + 21 = 33,5, S_{S''TC''} = \frac{33,5 \cdot 50}{2} = 837,5$$

$$S = S_{S''PQ} + S_{S''TC''} = 3600 + 837,5 = 4437,5$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{521}}{2}$ мм, 4437,5 мм²

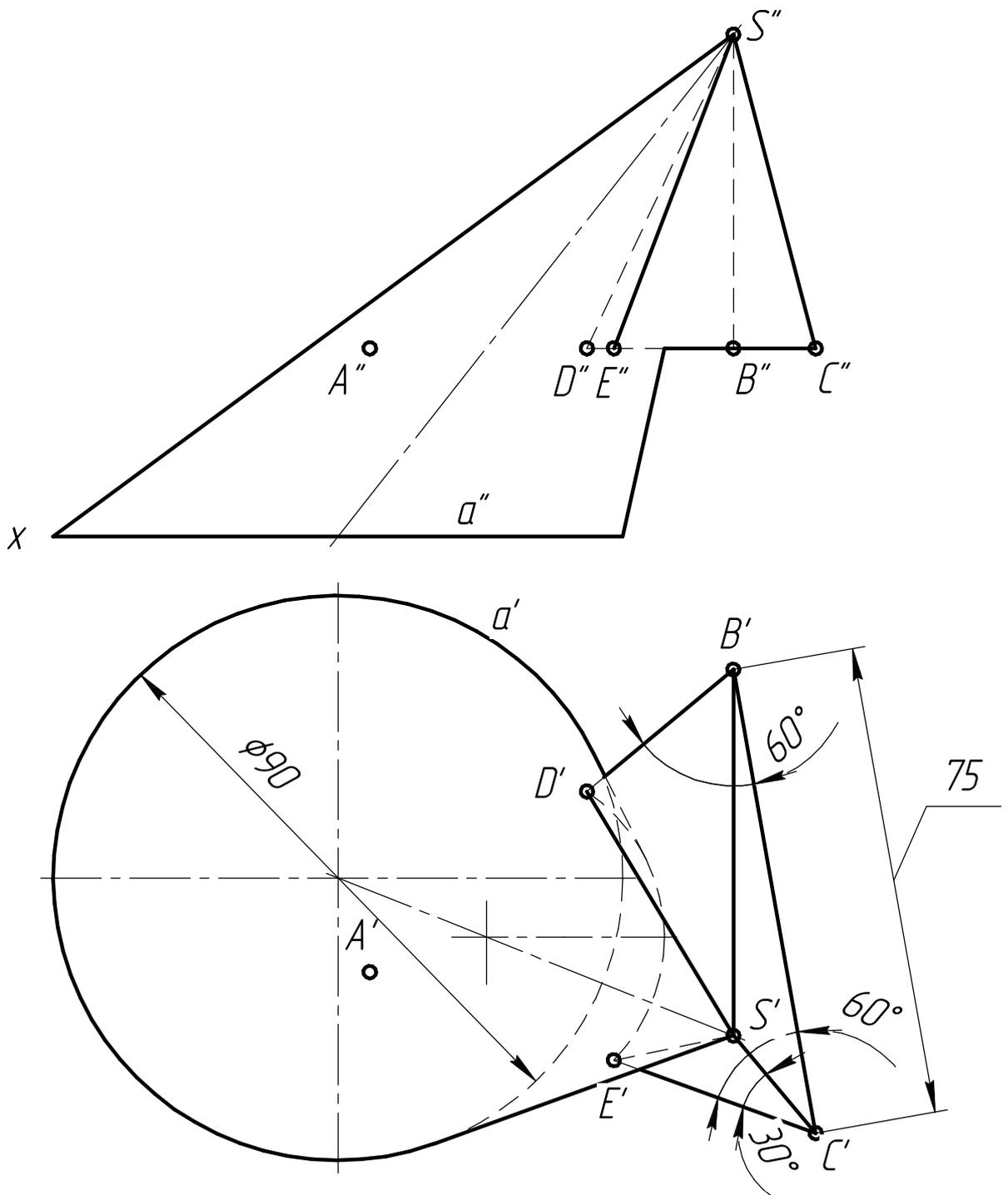
Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

Вариант: 2

класс: 10–11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса a' и вершин основания пирамиды $A'B'C'$. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм. Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
- 3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
- 4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



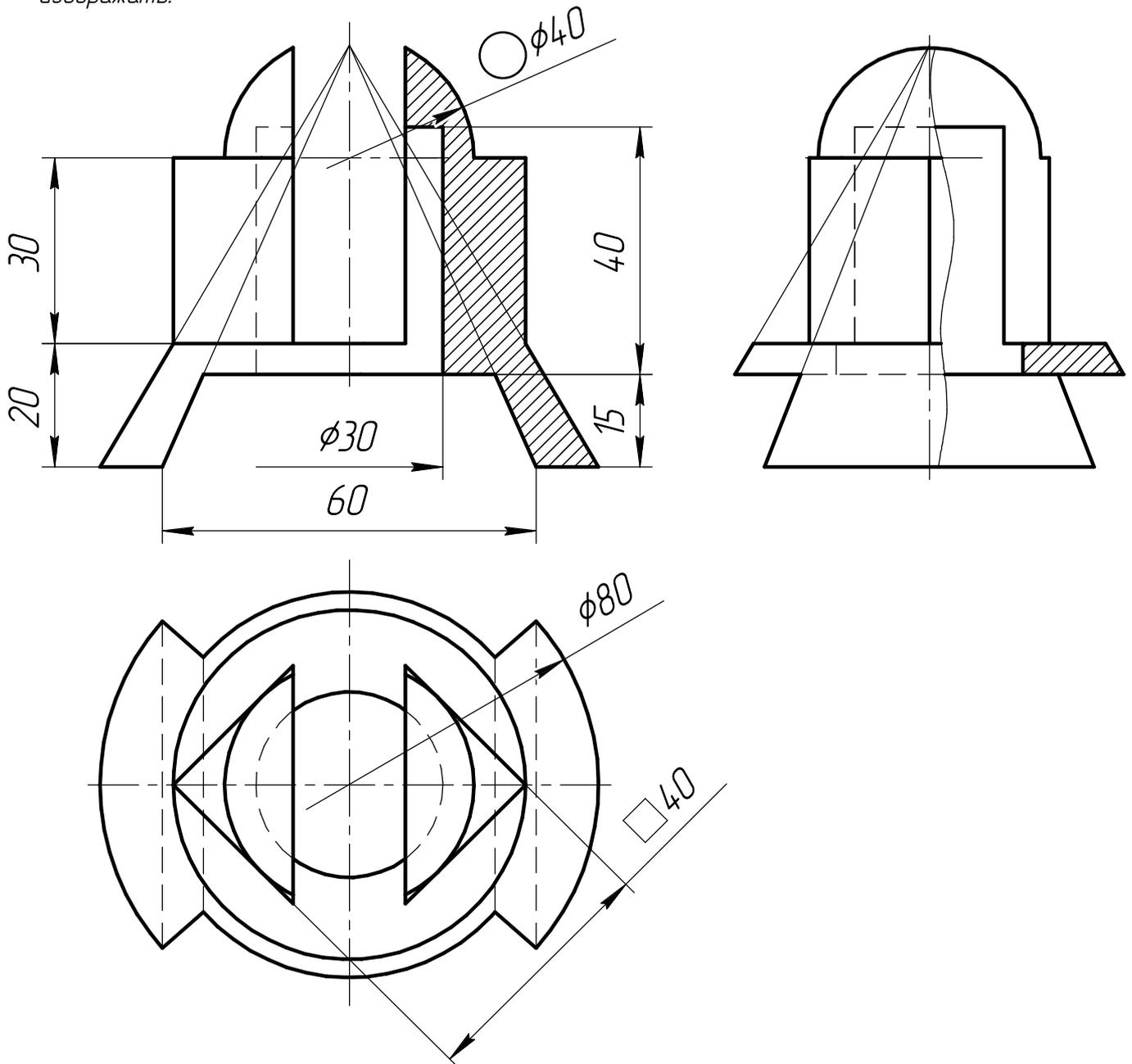
№	Критерии задача 4а	Да	Нет
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2	-
2	Построена линия пересечения фигур	2	-
3	Определена видимость очерка конуса	1	-
4	Определена видимость очерка пирамиды	1	-
5	Определена видимость участков линии пересечения	2	-
6	Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2	-
	Итого	до 10	

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10-11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



№	Критерии задача 6 (Вариант №2)	Да	Нет
1	Общие требования:		
	Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4	-
2	Главный вид		
	Главный вид выполнен как соединение половины вида и половины фронтального разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (осевая как линия разделения вида и разреза)	4	-
3	Вид слева		
	Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	5	-
4	Вид сверху		
	Вид сверху выполнен без разреза (учитывать только при выполнении пункта 1)	2	-
5	Указание размеров		
	Обозначены более половины необходимых размеров	4	-
6	Оформление		
	Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1	-
	Итого	до 20	