

КМиГ

9-й класс

Вариант №1

1) (10 баллов). Три велосипедиста стартуют одновременно из трёх точек круговой гоночной трассы, являющихся вершинами равностороннего треугольника, и едут в одном направлении. Первый велосипедист обгоняет второго через 4 минуты после старта, а третьего – через 5 минут после старта. Известно, что третий велосипедист едет быстрее второго. Через сколько минут после старта третий велосипедист первый раз догонит второго?

**Решение:** пусть скорость первого –  $x$  кругов/минуту, второго –  $y$  кругов/минуту, третьего –  $z$  кругов/минуту. Если первый велосипедист едет в направлении второго, то он догонит второго за 4 минуты, проехав на  $\frac{1}{3}$  круга больше второго, а за 5 минут догонит третьего, проехав на  $\frac{2}{3}$  круга больше третьего. Но такое невозможно в силу того, что скорость третьего велосипедиста больше скорости второго. Следовательно, первый велосипедист едет в направлении третьего велосипедиста. Тогда получаем

систему уравнений: 
$$\begin{cases} \frac{2}{3(x-y)} = 4 \\ \frac{1}{3(x-z)} = 5 \end{cases}$$
. Решая систему, получаем: 
$$\begin{cases} x-y = \frac{1}{6} \\ (x-z) = \frac{1}{15} \end{cases}$$
.

Вычтем из первого уравнения второе, получим:  $z-y = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{5-2}{30} = \frac{1}{10}$ .

Следовательно, время, за которое третий велосипедист догонит второго

$$t = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$  минуты (3 минуты 20 секунд).

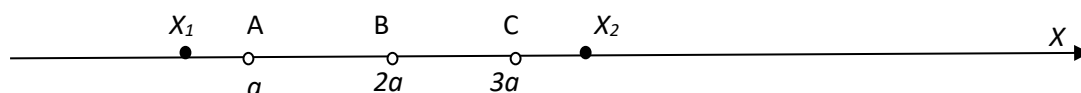
**Критерии выставления баллов:**

Баллы	Критерии выставления
10	В результате верного обоснованного решения получен верный ответ.
8	Верно определено направление движения, составлена правильная система уравнений, получен ответ, неверный из-за арифметической ошибки.
5	Верно определено направление движения, верно составлена система уравнений, дальнейших результативных продвижений нет.
2	Верно определено направление движения, дальнейших продвижений нет.
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих критериев.

2) (10 баллов). При каких действительных значениях параметра  $a$  среди всех решений неравенства  $|x - 3a| + |2a - x| + |x - a| < 3a$  есть ровно одно целое.

**Решение.**

Очевидно, что  $a > 0$ , а решение неравенства  $x \in (a; 3a)$ . Действительно, пусть  $x \notin (a; 3a)$  или  $x \notin \mathbb{R}$ , тогда  $3a = 0 + a + 2a \leq |x - 3a| + |2a - x| + |x - a|$ , см. рис., а любая точка внутри  $AC$  - удовлетворяет неравенству.



Следовательно, если  $x$  - решение, то  $x > 0$ .

Пусть  $x = 1$  - решение неравенства, тогда  $x = 2$  не должно ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} a < 1; \\ 1 < 3a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}$ .

Пусть  $x = 2$  - решение неравенства, тогда  $x = 1$  и  $x = 3$  не должны ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} 1 \leq a < 2; \\ 2 < 3a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$ .

Пусть  $x = n, n \geq 3$  - решение неравенства, тогда  $x = n - 1$  и  $x = n + 1$  не должны ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} n - 1 \leq a < n; \\ n < 3a \leq n + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$ , так как  $n - 1 > (n + 1)/3$ .

Ответ:  $\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}; a = 1$ .

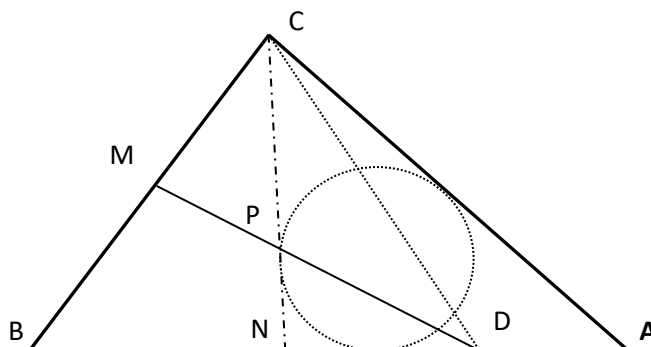
**Критерии.**

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
7	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметические ошибки или решение недостаточно обосновано.
5	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты.
2	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

3) (10 баллов). В прямоугольном треугольнике  $ABC$  высота  $CN$  опущена на гипотенузу. В треугольник  $ANC$  вписана окружность, которая касается  $CN$  в точке  $P$ .  $M$  – середина  $BC$ . Прямая  $PM$  пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$ ,  $AD = 7$  см, а радиус этой окружности в три раза меньше высоты  $CN$ . Найдите длину радиуса этой окружности.

### Решение.

Очевидно, что  $P$  – точка пересечения медиан в треугольнике  $BDC$ , так как  $PN$  равна радиусу окружности, вписанной в треугольник  $ANC$ , следовательно, треугольник  $BDC$  – равнобедренный.



Так как в прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 (египетский) радиус вписанной окружности  $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$  и  $3r = 3$  равен катету египетского, то треугольник  $ANC$  подобен египетскому.

Пусть радиус данной окружности  $x$ , тогда  $CN = 3x$ ,  $NA = 4x$ ,  $CA = 5x$ ,  $DN = BN = \frac{9}{4}x$ , треугольник  $BNC \sim CNA$ .

Следовательно,  $DA = AN - DN = 4x - \frac{9}{4}x = \frac{7}{4}x = 7$  см  $\Rightarrow x = 4$  см.

### Критерии

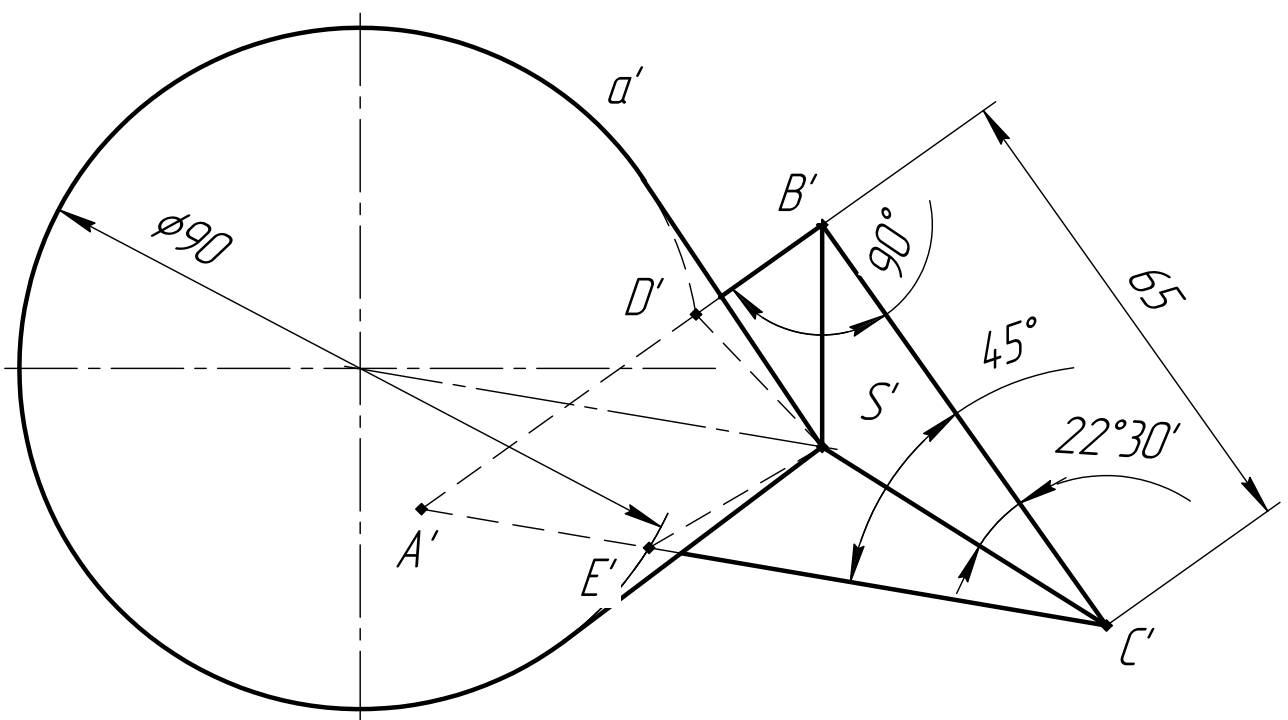
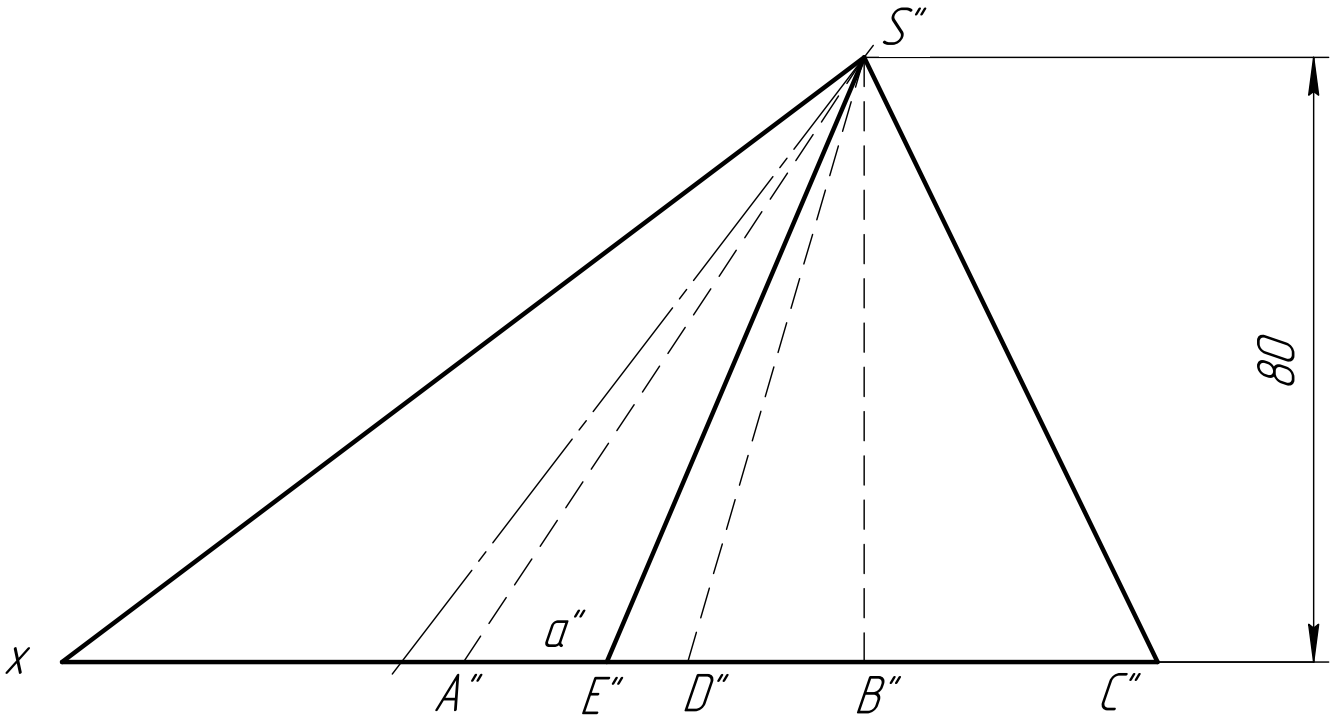
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
6	Верно построен рисунок и доказано, что треугольник BDC – равнобедренный
0	Решение не соответствует вышперечисленным требованиям.

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.

Вариант: 1

**Задача 4а** (10 баллов). Основание пирамиды  $A'B'C'$  и основание наклонного конуса  $a'$  лежат в горизонтальной плоскости проекции. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Проекция вершины обозначена как  $S'$  в горизонтальной плоскости проекции. Высота конуса 80 мм. Требуется:

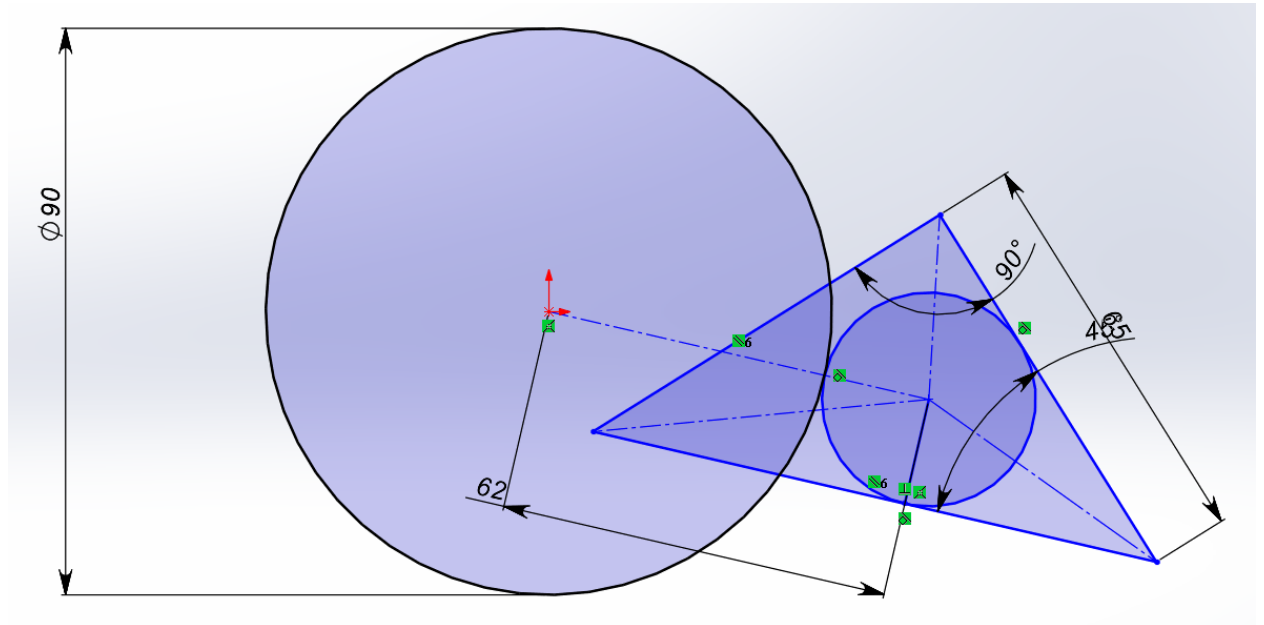
- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
- 3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.



<b>№</b>	<b>Критерии задача 4а</b>	<b>Да</b>	<b>Нет</b>
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2	-
2	Построена линия пересечения фигур	2	-
3	Определена видимость очерка конуса	1	-
4	Определена видимость очерка пирамиды	1	-
5	Определена видимость участков линии пересечения	2	-
6	Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2	-
	<b>Итого</b>		<b>до 10</b>

5) (10 баллов). Окружность с центром в точке  $S'$  касается окружности  $a'$ , а также отрезков  $B'C'$  и  $A'C'$ . Найдите площадь треугольника  $A'B'S'$ , если точка  $S'$  удалена от центра окружности  $a'$  на 62 мм.

**Решение.**



1. Обозначим центр круга  $a'$  как  $O'$ . Тогда радиус  $R$  окружности, касающейся двух сторон треугольника и круга, равен  $O'S'$  минус радиус круга  $a'$ .  $R = 62 - 45 = 17$
2. Площадь  $A_{A'S'C'} = \frac{1}{2} A'C' * R = \frac{\sqrt{2}}{2} B'C' * R = \frac{1}{2} 65 \cdot 65 = \frac{4225}{2}$
3. Площадь  $A_{B'S'C'} = \frac{1}{2} B'C' * R = 65 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 17 = \frac{1105\sqrt{2}}{2}$
4. Искомая Площадь  $A_{A'S'B'} = A_{A'B'C'} - A_{A'S'C'} - A_{B'S'C'} = \frac{1}{2} B'C'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} B'C' * R - \frac{1}{2} B'C' * R = \frac{4225}{2} - \frac{1105}{2} - \frac{1105\sqrt{2}}{2} = 2210 - \frac{1105\sqrt{2}}{2}$ .

**Ответ:** е.

**Критерии.**

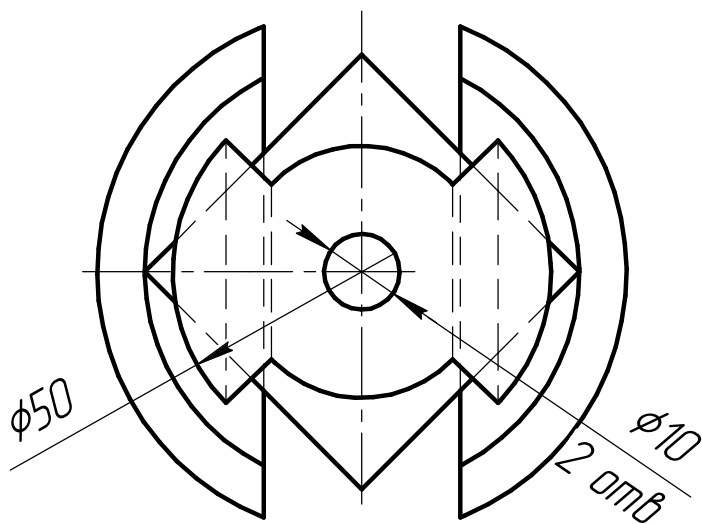
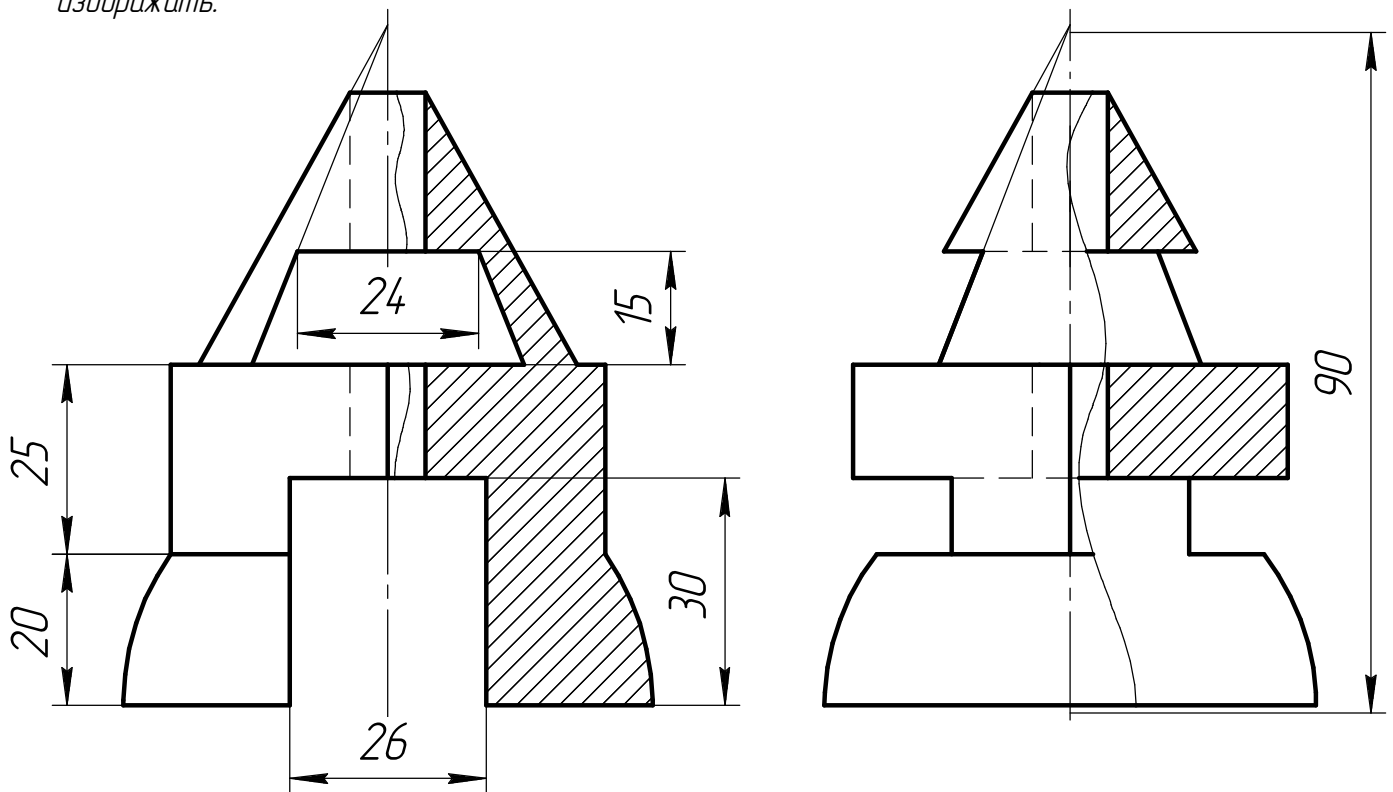
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Верно определён алгоритм решения задачи и верно найдены две из трёх площадей.
5	Верно определён алгоритм решения задачи. Найдена одна из трёх площадей.
2	Верно определён алгоритм решения задачи.
0	Задача не соответствует ни одному из перечисленных критериев

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.  
Вариант: 1

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



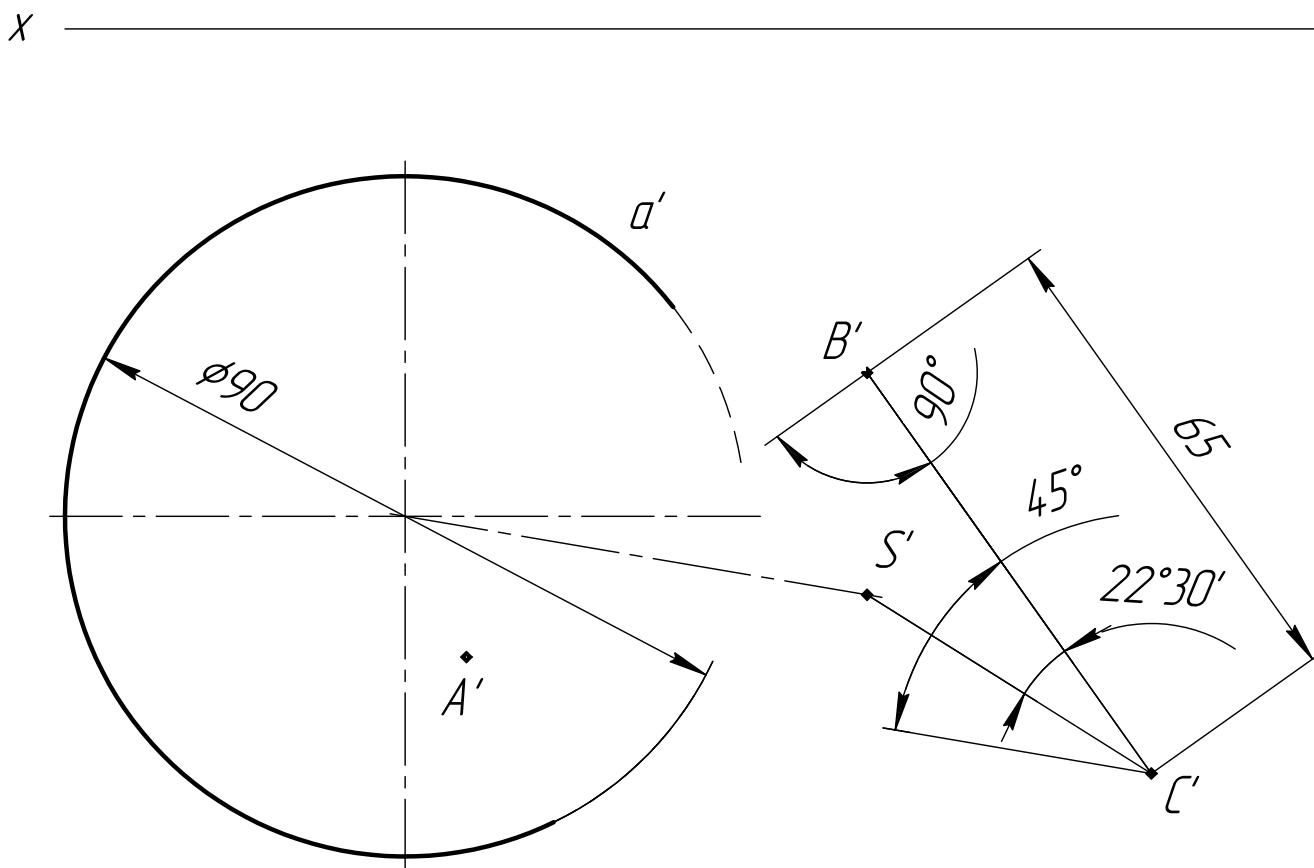


<b>№</b>	<b>Критерии задача 6 (Вариант №1)</b>	<b>Да</b>	<b>Нет</b>
<b>1</b>	<b>Общие требования:</b>		
	Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4	-
<b>2</b>	<b>Главный вид</b>		
	Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	4	-
<b>3</b>	<b>Вид слева</b>		
	Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	5	-
<b>4</b>	<b>Вид сверху</b>		
	Вид сверху выполнен без разреза (учитывать только при выполнении пункта 1)	2	-
<b>5</b>	<b>Указание размеров</b>		
	Обозначены более половины необходимых размеров	4	-
<b>6</b>	<b>Оформление</b>		
	Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1	-
	<b>Итого</b>	<b>до 20</b>	



**Задача 4 (10 баллов).** Основание пирамиды  $A'B'C'$  и основание наклонного конуса  $a'$  лежат в горизонтальной плоскости проекций. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Проекция вершины обозначена как  $S'$  в горизонтальной плоскости проекций. Высота конуса 80 мм. Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
- 3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.

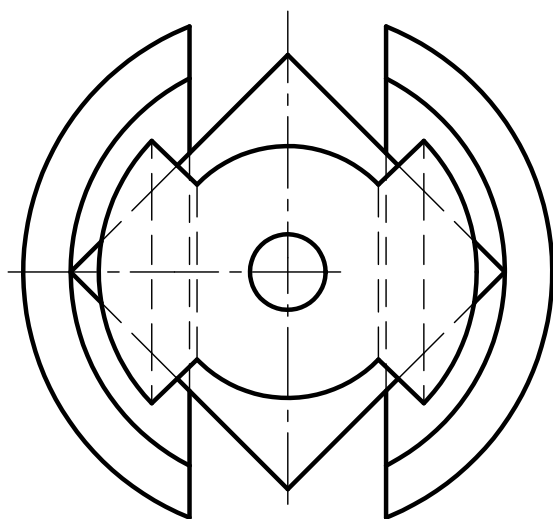
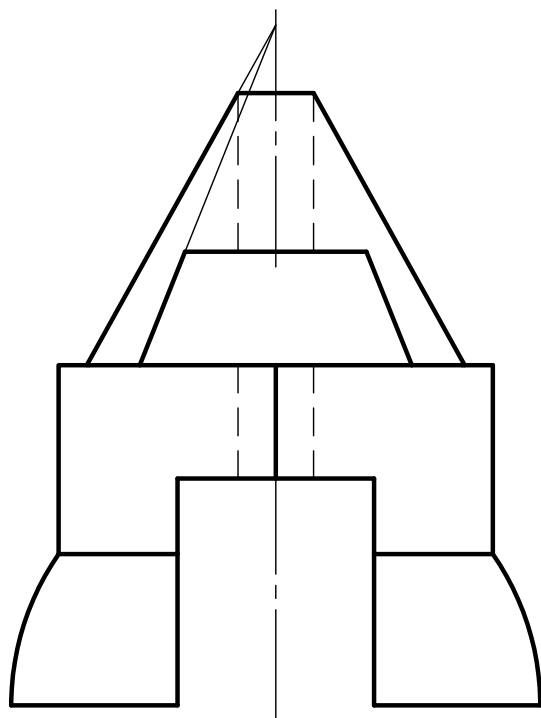




*Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.*

*Требуется:*

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;*
- 3) все изображения оформить в соответствии с ЕСКД;*
- 4) нанести размеры, причем их количество должно быть минимальное, но однозначно определяющее форму фигуры;*
- 5) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*



КМиГ

9-й класс

Вариант №2

1) (10 баллов). Три бегуна стартуют одновременно из трёх точек круговой беговой дорожки, являющихся вершинами равностороннего треугольника, и бегут в одном направлении. Первый бегун обгоняет второго через 6 минут после старта, а третьего – через 9 минут после старта. Известно, что третий бегун бежит быстрее второго. Через сколько минут после старта третий бегун догонит второго?

**Решение:** пусть скорость первого –  $x$  кругов/минуту, второго –  $y$  кругов/минуту, третьего –  $z$  кругов/минуту. Если первый бегун движется в направлении второго, то он догонит второго за 6 минуты, пробежав на  $\frac{1}{3}$  круга больше второго, а за 9 минут догонит третьего, пробежав на  $\frac{2}{3}$  круга больше третьего. Но такое невозможно в силу того, что скорость третьего бегуна больше скорости второго. Следовательно, первый бегун движется в направлении третьего бегуна. Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3(x-y)} = 6 \\ \frac{1}{3(x-z)} = 9 \end{cases} \quad \text{Решая систему, получаем:} \quad \begin{cases} x-y = \frac{1}{9} \\ (x-z) = \frac{1}{27} \end{cases} \quad \text{Вычтем из первого}$$

уравнения второе, получим:  $z-y = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{3-1}{27} = \frac{2}{27}$ . Следовательно, время,

за которое третий бегун догонит второго  $t = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{27}} = \frac{9}{2} = 4,5$ .

**Ответ:**  $\frac{9}{2} = 4,5$  минуты.

**Критерии выставления баллов:**

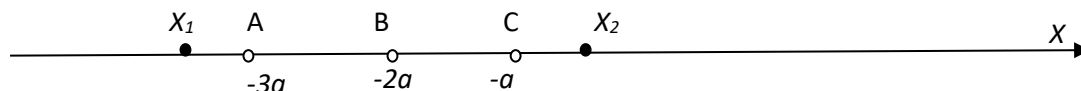
Баллы	Критерии выставления
10	В результате верного обоснованного решения получен верный ответ.
8	Верно определено направление движения, составлена правильная система уравнений, получен ответ, неверный из-за арифметической ошибки.

5	Верно определено направление движения, верно составлена система уравнений, дальнейших результативных продвижений нет.
2	Верно определено направление движения, дальнейших продвижений нет.
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих критериев.

2) (10 баллов). При каких действительных значениях параметра  $a$  среди всех решений неравенства  $|x + 3a| + |x + 2a| + |x + a| < 3a$  есть ровно одно целое.

### Решение.

Очевидно, что  $a > 0$ , а решение неравенства  $x \in (-3a; -a)$ . Действительно, пусть  $x \notin (-3a; -a)$  или  $x \notin AC$ , тогда  $3a = 0 + a + 2a \leq |x + 3a| + |2a + x| + |x + a|$ , см. рис., а любая точка внутри  $AC$  - удовлетворяет неравенству.



Следовательно, если  $x$ - решение, то  $x < 0$ .

Пусть  $x = -1$  – решение неравенства, тогда  $x = -2$  не должно ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} a < 1; \\ 1 < 3a \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}$ .

Пусть  $x = -2$  – решение неравенства, тогда  $x = -1$  и  $x = -3$  не должны ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} 1 \leq a < 2; \\ 2 < 3a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$ .

Пусть  $x = -n, n \geq 3$  – решение неравенства, тогда  $x = -n - 1$  и  $x = -n + 1$  не должны ему удовлетворять, поэтому:  $\begin{cases} n - 1 \leq a < n; \\ n < 3a \leq n + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$ , так как  $n - 1 > (n + 1)/3$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}; a = 1$ .

### Критерии.

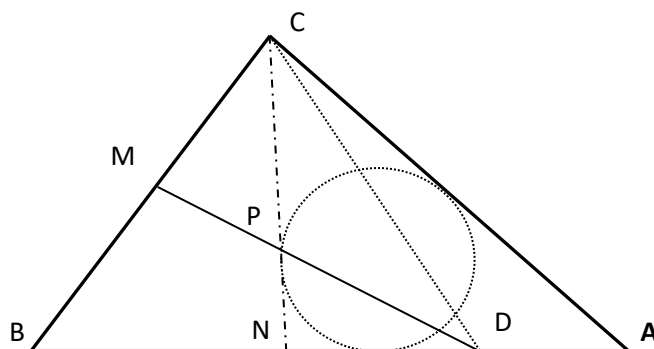
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
7	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметические ошибки или решение недостаточно обосновано.
5	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты.

2	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

3) (10 баллов). В прямоугольном треугольнике  $ABC$  высота  $CN$  опущена на гипотенузу. В треугольник  $ANC$  вписана окружность, которая касается  $CN$  в точке  $P$ .  $M$  – середина  $BC$ . Прямая  $PM$  пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$ ,  $AD = 3,5$  см, а диаметр этой окружности в полтора раза меньше высоты  $CN$ . Найдите длину радиуса этой окружности.

**Решение.**

Очевидно, что  $P$  – точка пересечения медиан в треугольнике  $BDC$ , так как  $PN$  равна радиусу окружности, вписанной в треугольник  $ANC$ , следовательно, треугольник  $BDC$  – равнобедренный.



Так как в прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 (египетский) радиус вписанной окружности  $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$  и  $3r = 3$  равен катету египетского, то треугольник  $ANC$  подобен египетскому.

Пусть радиус данной окружности  $x$ , тогда  $CN = 3x$ ,  $NA = 4x$ ,  $CA = 5x$ ,  $DN = BN = \frac{9}{4}x$ , треугольник  $BNC \sim CNA$ .

Следовательно,  $DA = AN - DN = 4x - \frac{9}{4}x = \frac{7}{4}x = 3,5$  см  $\Rightarrow x = 2$  см.

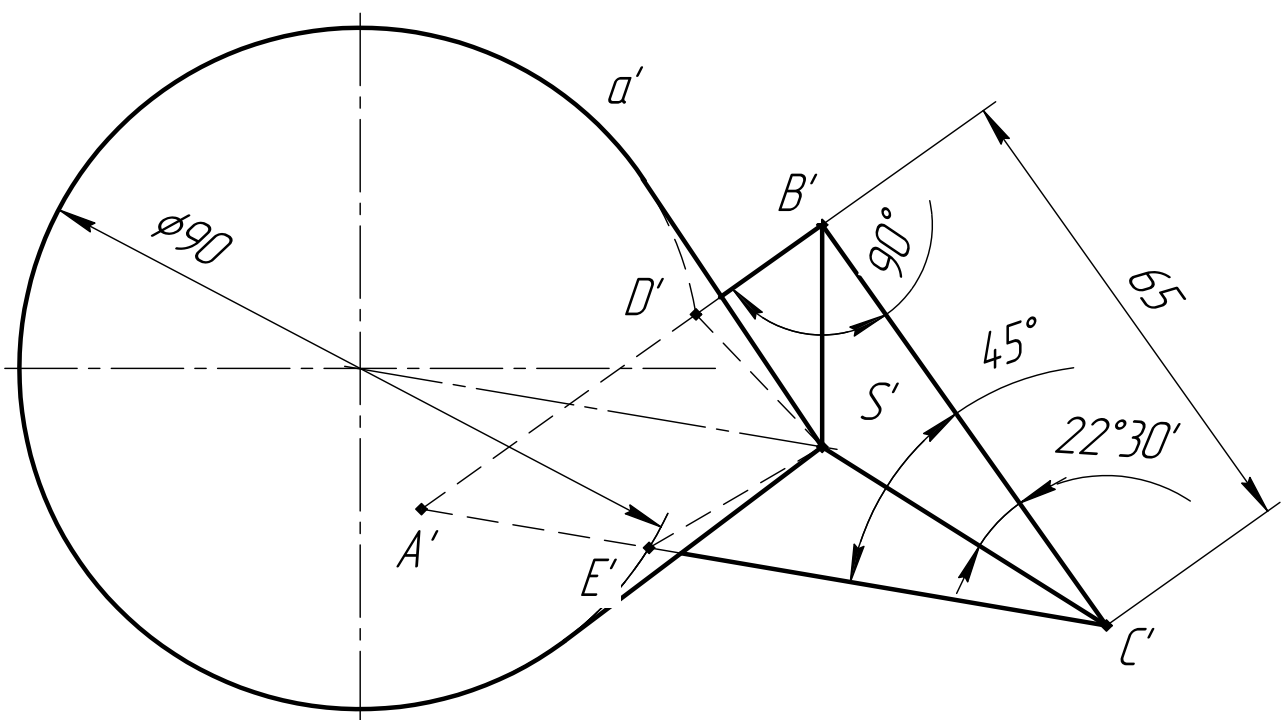
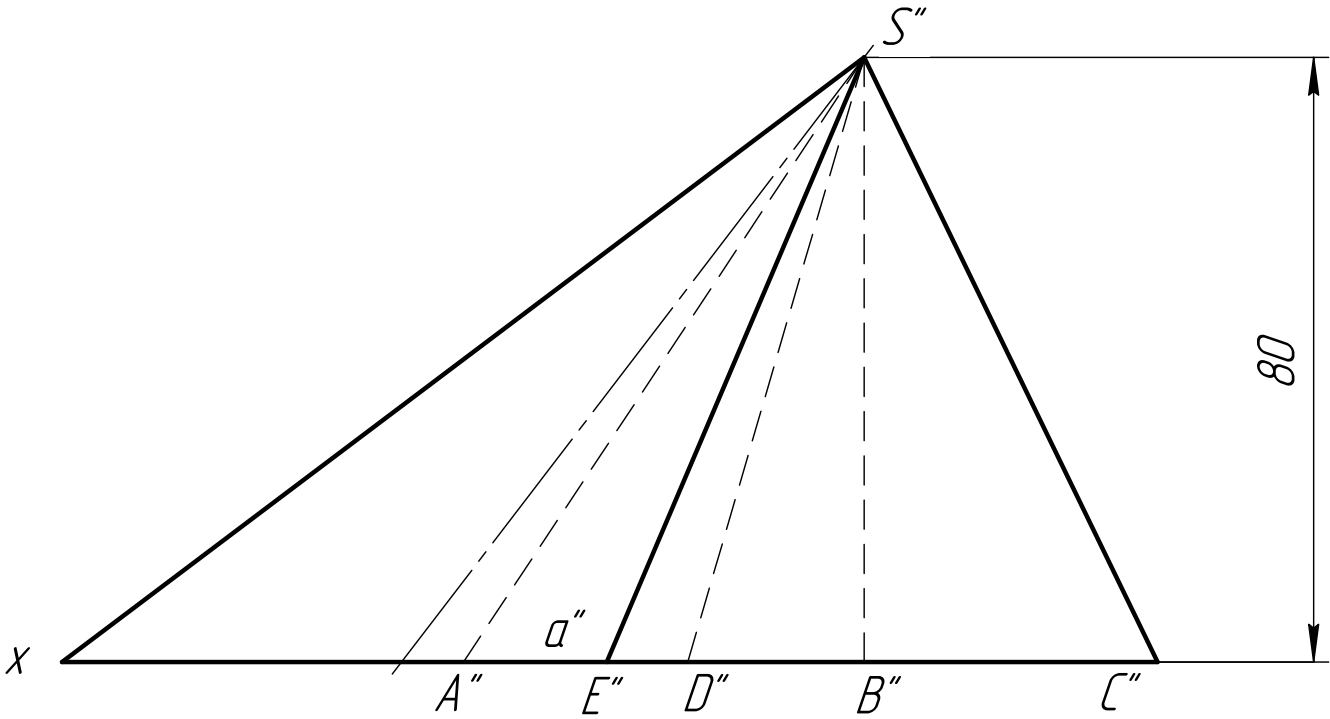
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
6	Верно построен рисунок и доказано, что треугольник $BDC$ – равнобедренный
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.

Вариант: 1

**Задача 4а** (10 баллов). Основание пирамиды  $A'B'C'$  и основание наклонного конуса  $a'$  лежат в горизонтальной плоскости проекций. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Проекция вершины обозначена как  $S'$  в горизонтальной плоскости проекций. Высота конуса 80 мм. Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
- 3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.

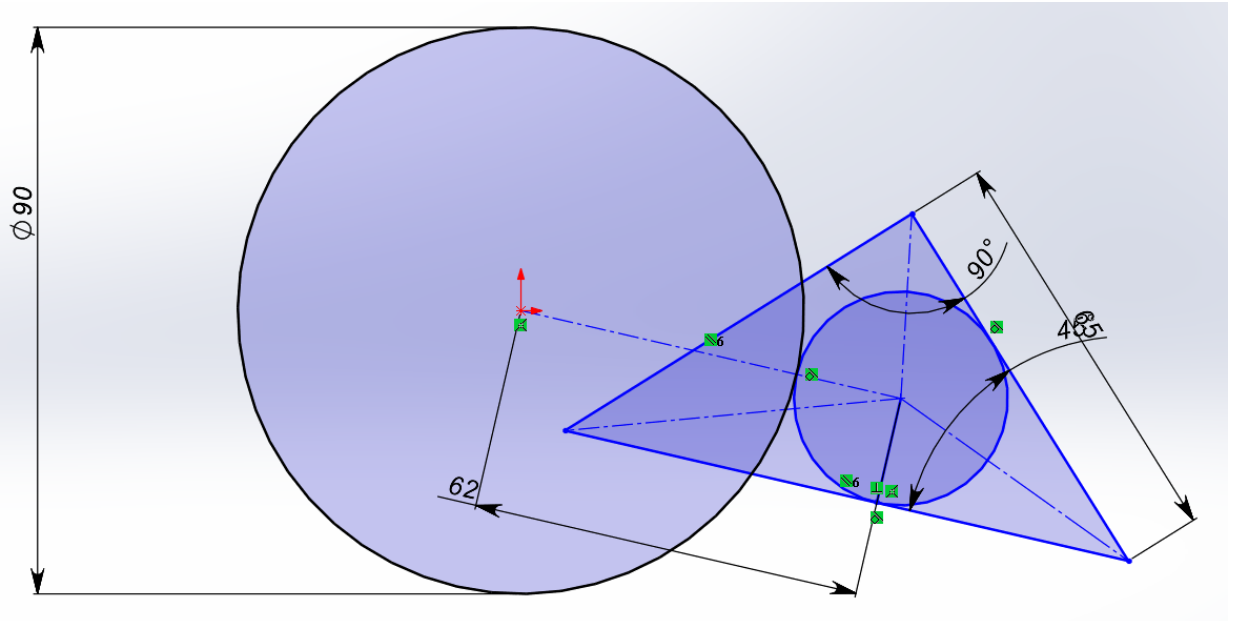


<b>№</b>	<b>Критерии задача 4а</b>	<b>Да</b>	<b>Нет</b>
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2	-
2	Построена линия пересечения фигур	2	-
3	Определена видимость очерка конуса	1	-
4	Определена видимость очерка пирамиды	1	-
5	Определена видимость участков линии пересечения	2	-
6	Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2	-
	<b>Итого</b>		<b>до 10</b>



5) (10 баллов). Окружность с центром в точке  $S'$  касается окружности  $a'$ , а также отрезков  $B'C'$  и  $A'C'$ . Найдите площадь треугольника  $A'B'S'$ , если точка  $S'$  удалена от центра окружности  $a'$  на 62 мм.

**Решение.**



1. Обозначим центр круга  $a'$  как  $O'$ . Тогда радиус  $R$  окружности, касающейся двух сторон треугольника и круга, равен  $O'S'$  минус радиус круга  $a'$ .  $R = 62 - 45 = 17$
2. Площадь  $A_{A'S'C'} = \frac{1}{2} A'C' * R = \frac{\sqrt{2}}{2} B'C' * R = \frac{1}{2} 65 \cdot 65 = \frac{4225}{2}$
3. Площадь  $A_{B'S'C'} = \frac{1}{2} B'C' * R = 65 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 17 = \frac{1105\sqrt{2}}{2}$
4. Искомая Площадь  $A_{A'B'S'} = A_{A'B'C'} - A_{A'S'C'} - A_{B'S'C'} = \frac{1}{2} B'C'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} B'C' * R - \frac{1}{2} B'C' * R = \frac{4225}{2} - \frac{1105\sqrt{2}}{2} - \frac{1105}{2} = 2210 - \frac{1105\sqrt{2}}{2}$ .

**Ответ:** е.

**Критерии.**

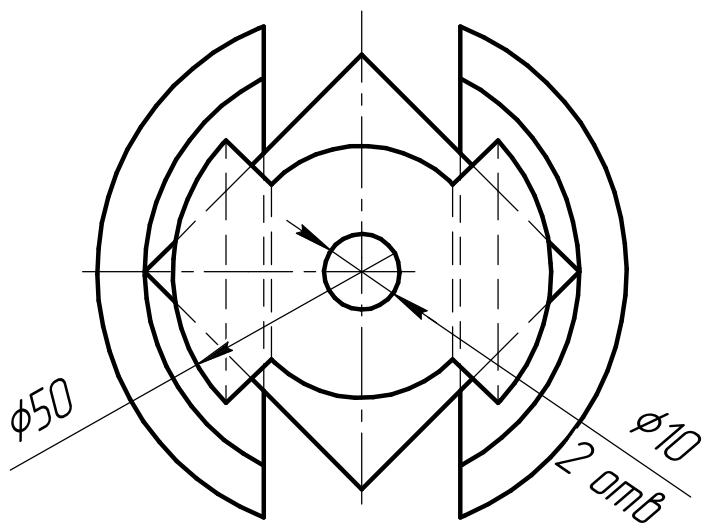
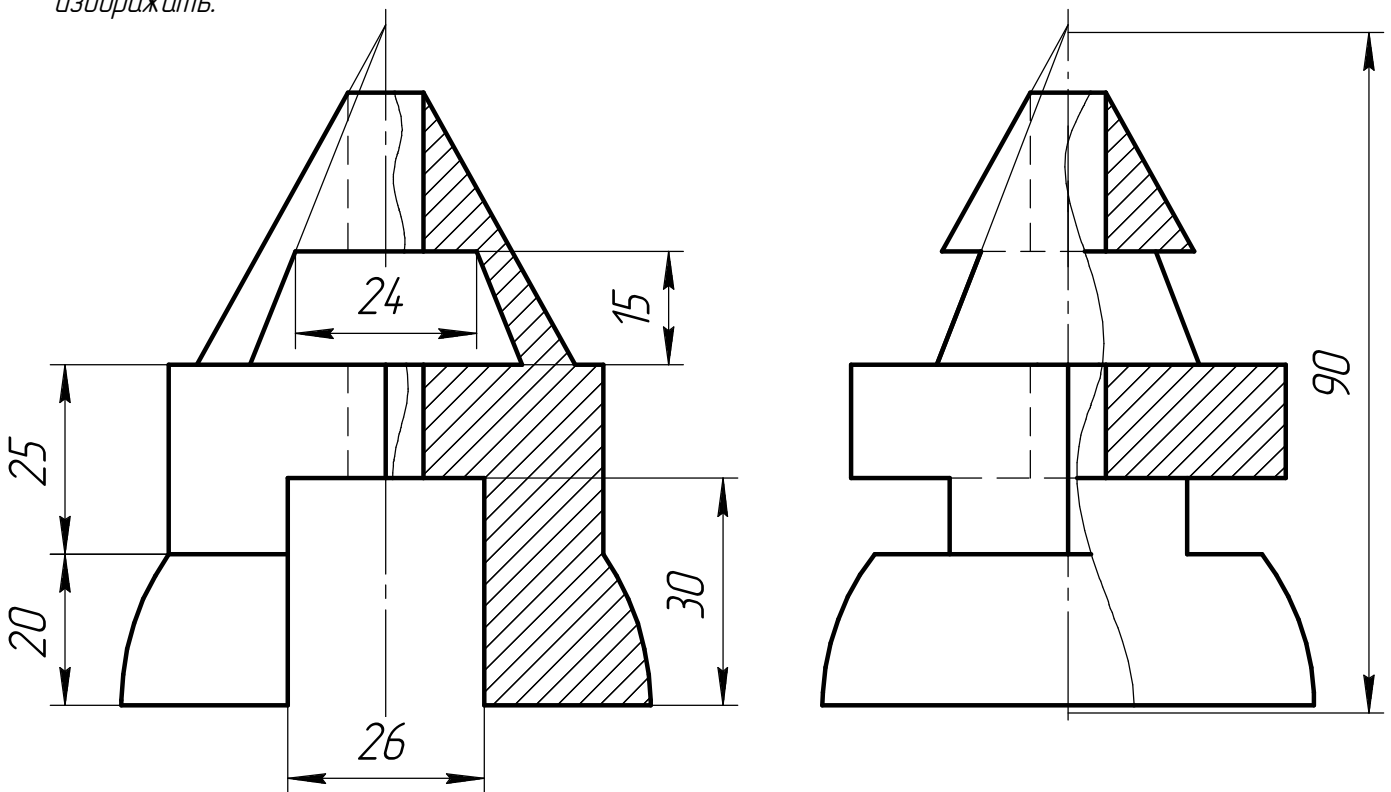
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Верно определён алгоритм решения задачи и верно найдены две из трёх площадей.
5	Верно определён алгоритм решения задачи. Найдена одна из трёх площадей.
2	Верно определён алгоритм решения задачи.
0	Задача не соответствует ни одному из перечисленных критериев

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.  
Вариант: 1

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



<b>№</b>	<b>Критерии задача 6 (Вариант №2)</b>	<b>Да</b>	<b>Нет</b>
<b>1</b>	<b>Общие требования:</b>		
	Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4	-
<b>2</b>	<b>Главный вид</b>		
	Главный вид выполнен как соединение половины вида и половины фронтального разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (осевая как линия разделения вида и разреза)	4	-
<b>3</b>	<b>Вид слева</b>		
	Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	5	-
<b>4</b>	<b>Вид сверху</b>		
	Вид сверху выполнен без разреза (учитывать только при выполнении пункта 1)	2	-
<b>5</b>	<b>Указание размеров</b>		
	Обозначены более половины необходимых размеров	4	-
<b>6</b>	<b>Оформление</b>		
	Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1	-
	<b>Итого</b>	<b>до 20</b>	