



Профиль олимпиады:
«Компьютерное моделирование и графика»,
тур по математике и инженерной графике

Класс участия: 11

Вариант задания: 1

Задача 1 (10 баллов). Имеются n различных красок, упорядоченных по спектру цветов. Стандартный флаг состоит из 3 горизонтальных полос (нижняя шире). Цвета граничащих полос должны быть разными и не соседними по спектру. При каком наименьшем n можно получить не менее 125000 разных флагов?

Задача 2 (10 баллов). Выразить в градусах $\arcsin \frac{\sqrt{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметр a , при которых система
$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-a)^2} \leq \sqrt{13 - 4a + a^2}, \\ y = (x - a + 2)^2 + 2, \end{cases}$$
 имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом из найденных a .

Задача 4 (10 баллов). См. лист 2.

Задача 5 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 4). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Задача 6 (20 баллов). См. лист 3.

Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

Задача 1 (10 баллов). Имеются n различных красок, упорядоченных по спектру цветов. Стандартный флаг состоит из 3 горизонтальных полос (нижняя шире). Цвета граничащих полос должны быть разными и не соседними по спектру. При каком наименьшем n можно получить не менее 125000 разных флагов?

Решение:

Если цвет средней полосы — крайний в спектре, то цвет как верхней, так и нижней полосы — любой из $n-2$. Если цвет средней полосы — не крайний в спектре, то цвет как верхней, так и нижней полосы — любой из $n-3$. Общее число вариантов $2(n-2)^2 + (n-2)(n-3)^2 = 2m^2 + m(m-1)^2 = m^3 + m$, где $m = n-2$. Поскольку $m^3 < m^3 + m < (m+1)^3$, минимальным достаточным будет $m = 50$.

Ответ: 52.

Задача 2 (10 баллов). Выразить в градусах $\arcsin \frac{\sqrt{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$.

Решение. Выражение под арксинусом имеет вид

$$S = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

где

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 15^\circ.$$

Получаем $S = \cos 7,5^\circ = \sin 82,5^\circ$.

Ответ: 82,5.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-a)^2} \leq \sqrt{13-4a+a^2}, \\ y = (x-a+2)^2 + 2, \end{cases} \quad \text{имеет} \quad \text{единственное}$$

решение. Укажите это решение при каждом из найденных a .

Решение:

Пусть $M(x; y)$, $A(1; 2)$, $B(4; a)$.

Тогда $MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, $MB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-a)^2}$, $AB = \sqrt{13-4a+a^2}$.

Первое неравенство системы означает, что $MA + MB \leq AB$. Это возможно лишь в том случае, если $MA + MB = AB$, и точка M лежит на отрезке AB , т.е.

$y = \frac{a-2}{3}(x-1) + 2, x \in [1; 4]$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} y = \frac{a-2}{3}(x-1) + 2, x \in [1; 4], \\ y = (x-a+2)^2 + 2. \end{cases} \quad \text{Следовательно, требуется определить все значения}$$

параметра a , при которых уравнение $(x-a+2)^2 + 2 = \frac{a-2}{3}(x-1) + 2$ имеет

единственное решение на отрезке $[1; 4]$. Обозначим $b = \frac{a-2}{3}$. Тогда имеем

$$(x-3b)^2 - b(x-1) = 0, \quad x^2 - 7bx + 9b^2 + b = 0, \quad x \in [1; 4].$$

Пусть $f(x) = x^2 - 7bx + 9b^2 + b$. Тогда уравнение $x^2 - 7bx + 9b^2 + b = 0$ может иметь единственное решение на отрезке $[1; 4]$ в трех случаях.

1) $D = 13b^2 - 4b = 0, x = \frac{7b}{2} \in [1; 4]$. В этом случае $b = \frac{4}{13}$, и $a = \frac{38}{13}, x = \frac{14}{13}$.

2) $f(1)f(4) < 0, f(1) = 9b^2 - 6b + 1 = (3b-1)^2, f(4) = 9b^2 - 27b + 16,$
 $(9b^2 - 27b + 16)(3b-1)^2 < 0 \Leftrightarrow 9(b-b_1)(b-b_2)(3b-1)^2 < 0$, где

$$b_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{6}, \quad b_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{6}. \quad \text{В этом случае } b \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{6}; \frac{9+\sqrt{17}}{6} \right), \quad \text{и}$$

$$a \in \left(\frac{13-\sqrt{17}}{2}; \frac{13+\sqrt{17}}{2} \right), \quad x = \frac{7(a-2) - \sqrt{(a-2)(13a-38)}}{6}.$$

3) $f(1) = 0, f(1) = (3b-1)^2 = 0, b = \frac{1}{3}, x_0 = \frac{7b}{2} = \frac{7}{6}$. В этом случае на отрезке $[1; 4]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня $x_1 = 1, x_2 = \frac{4}{3}$.

$$f(4) = 0, f(4) = 9b^2 - 27b + 16 = 0,$$

$$b_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{6}, \quad x_0 = \frac{7b}{2} = \frac{63+7\sqrt{17}}{12} > 4 \Rightarrow \text{на } [1; 4] \text{ единственное решение } x = 4;$$

$$b_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{6}, \quad x_0 = \frac{7b}{2} = \frac{63-7\sqrt{17}}{12} < 4, \quad 4 - \frac{63-7\sqrt{17}}{12} = \frac{7\sqrt{17}-15}{12} < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\text{на } [1; 4] \text{ два решения } x_1 = \frac{39-7\sqrt{17}}{6}, x_2 = 4.$$

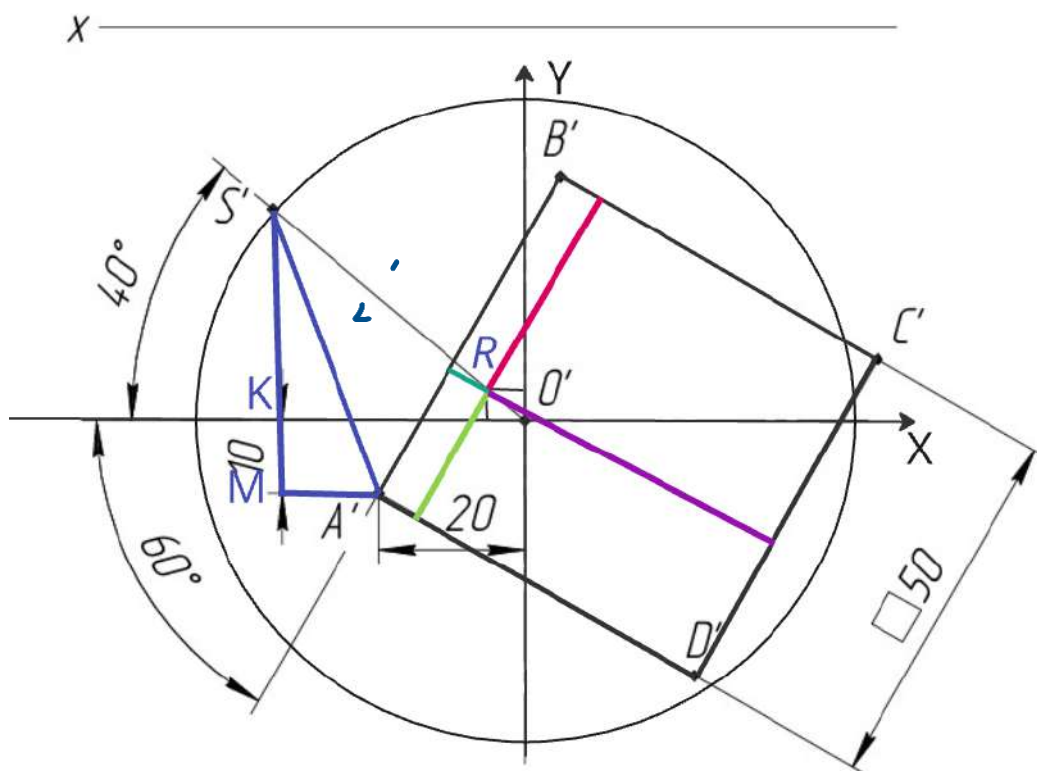
$$\text{В этом случае подходит } a = \frac{13+\sqrt{17}}{2}, \quad x = 4.$$

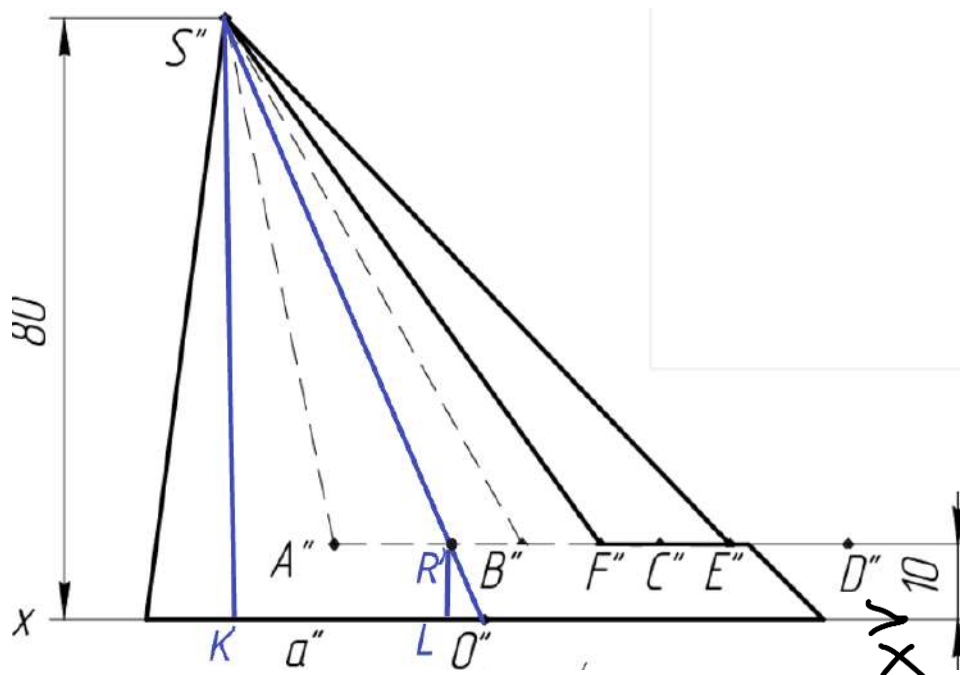
Ответ: $a \in \left\{ \frac{38}{13} \right\} \cup \left(\frac{13-\sqrt{17}}{2}; \frac{13+\sqrt{17}}{2} \right]$, при $a = \frac{38}{13}, x = \frac{14}{13}$,

при $a \in \left(\frac{13 - \sqrt{17}}{2}; \frac{13 + \sqrt{17}}{2} \right]$, $x = \frac{7(a - 2) - \sqrt{(a - 2)(13a - 38)}}{6}$.

Задача 4 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 5) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 5). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Решение:





Пусть R - центр сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$. В фронтальной плоскости проекций точка K – проекция на ось $O''X = O'X$ точки S'' (фронтальной проекции вершины S), точка L – проекция на ось $O''X = O'X$ точки R'' (фронтальной проекции R), $O'' = O'$. Треугольники $S''KO''$ и $R''LO''$ подобны, и $LO'' = KO''/8$. Следовательно, в горизонтальной плоскости проекций $LO' = KO'/8$.

В горизонтальной плоскости проекций рассмотрим прямоугольный треугольник $S'KO'$, $S'O' = 45$, $\cos \angle S'O'K = 0,8$, $\sin \angle S'O'K = 0,6$, $KO' = 36$, $S'K = 27$.

Тогда $LO' = 9/2$, $R'L = 27/8$.

Нужно найти расстояние от R' до сторон квадрата $A'B'C'D'$ в горизонтальной плоскости проекций. В системе координат $O'XY$ координаты точки $A'(-20; -10)$, прямая $A'B'$ составляет с положительным направлением оси $O'X$ угол 60° , и уравнение прямой $A'B'$ имеет вид $y = \sqrt{3}(x + 20) - 10$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'B'$:

$$d_{AB} = \frac{|\sqrt{3}(20 - 9/2) - 27/8 - 10|}{2} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $C'D'$:

$$d_{CD} = 50 - \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3.$$

Прямая $A'D'$ перпендикулярна прямой $A'B'$, ее уравнение $\sqrt{3}y + (x + 20) + 10\sqrt{3} = 0$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'D'$:

$$d_{AD} = \frac{|27\sqrt{3}/8 + 20 - 9/2 + 10\sqrt{3}|}{2} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $B'C'$:

$$d_{BC} = 50 - \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7.$$

Вычислим длину ребра SA . Высота H пирамиды $SABCD$ равна 70. Тогда $SA^2 = S'A'^2 + H^2$. В прямоугольном треугольнике $S'MA'$ вычислим гипотенузу $S'A'$:

$$S'M = S'K + KM = 27 + 10 = 37, \quad MA' = KO' - 20 = 36 - 20 = 16,$$

$$SA^2 = S'M^2 + MA'^2 + H^2 = 37^2 + 16^2 + 70^2 = 6525 = 225 \cdot 29.$$

$$SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8.$$

Ответ: $d_{AB} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7 \text{ мм}, \quad d_{CD} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3 \text{ мм},$

$$d_{AD} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3 \text{ мм}, \quad d_{BC} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7 \text{ мм}, \quad SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8 \text{ мм}.$$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по математике)

Класс: 11

Задание 1

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Верно и обоснованно рассмотрен один из частных случаев. Итоговый ответ неверный, или итоговый ответ верный, но доказательство его истинности представлено частично.	3
Рассуждения верные, но не все утверждения строго обоснованы, представлены верные формулы без необходимых объяснений.	5
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 2

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Верно использованы необходимые тригонометрические формулы, приводящие к табличным значениям углов.	3
Проведены верные преобразования, в результате которых получено уравнение, связывающее искомый угол и угол с известной градусной мерой.	5
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 3

максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Задача сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и параболы.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (промежутки), содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке (промежутках). При этом концы промежутка (промежутков) частично совпадают с концами верных промежутков.	6
Верно найдены нужные значения параметра. Допущены ошибки при выписывании решений системы или решения системы отсутствуют. Или потеряно одно из значений параметра, при этом верно выписаны решения для остальных значений параметра.	9
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Задание 5

максимальная оценка: **8 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA или одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	2
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA и одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата. Или верно и точно вычислены все расстояния от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	4
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	6
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Все ответы даны точно, а не приближенно.	8



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

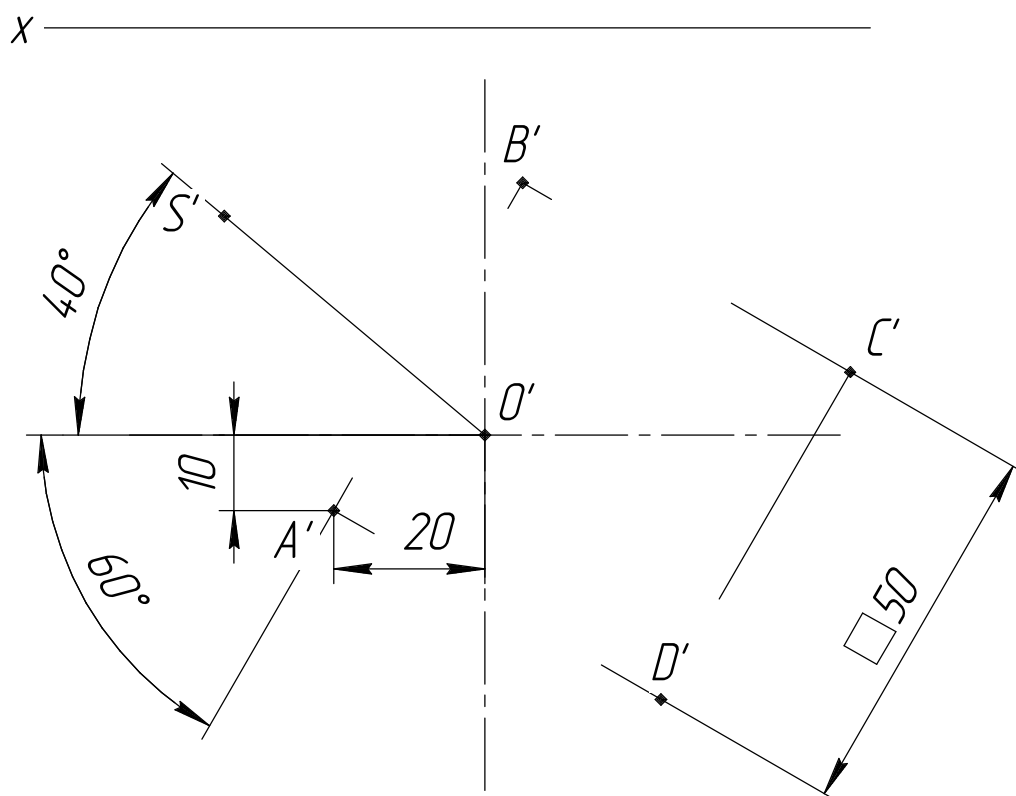
Вариант: 2

класс: 11

Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S' фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCD$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.





Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

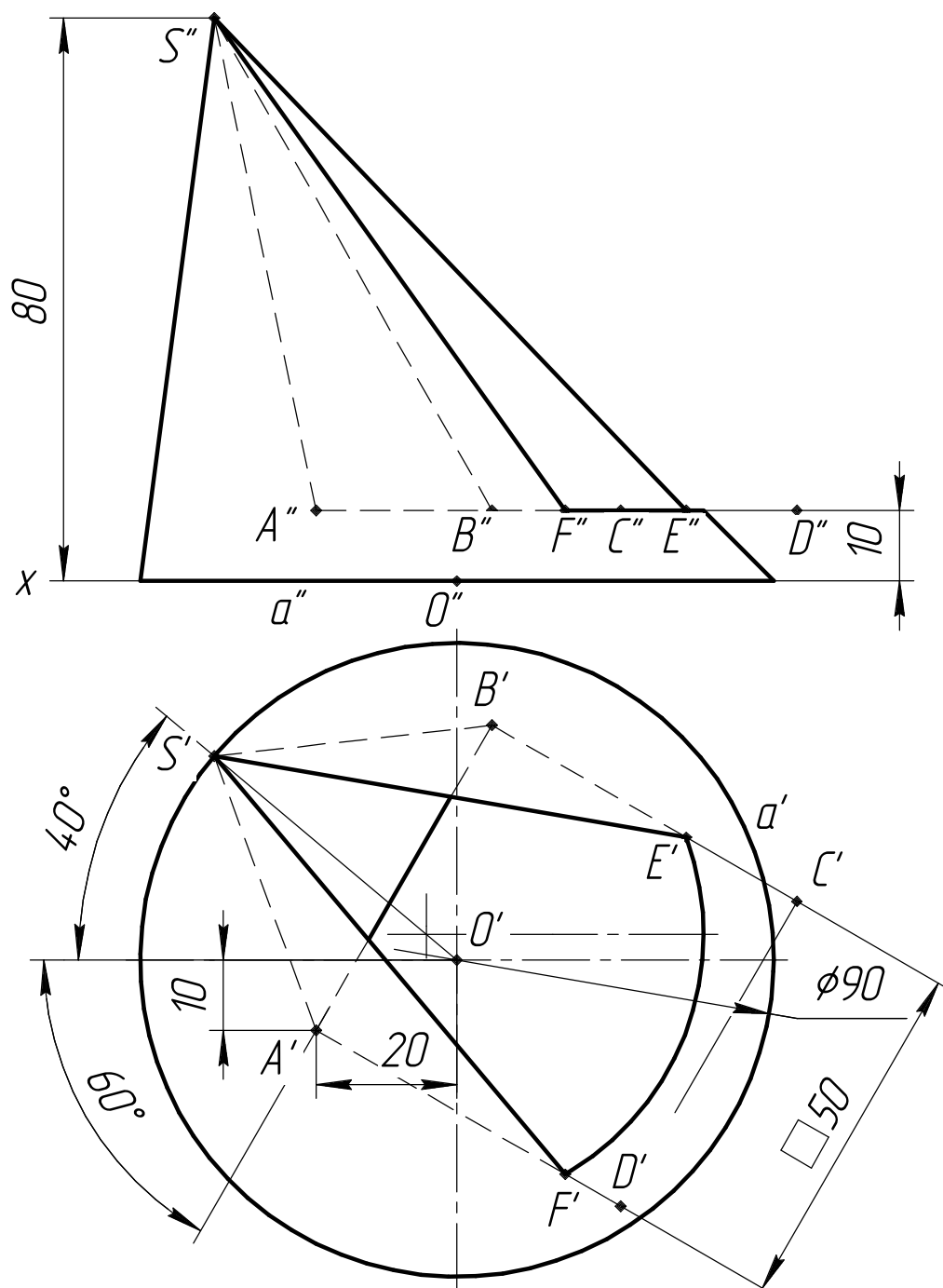
Вариант: 2

класс: 11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCD$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.





*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.*

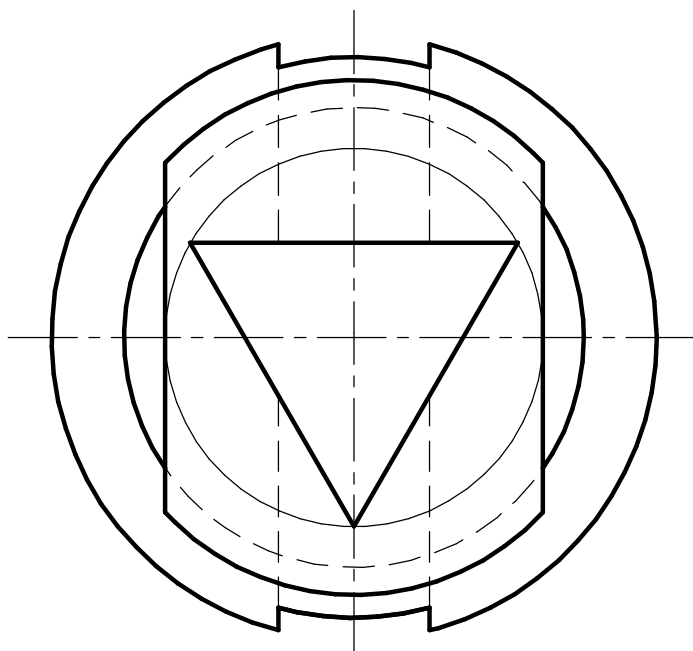
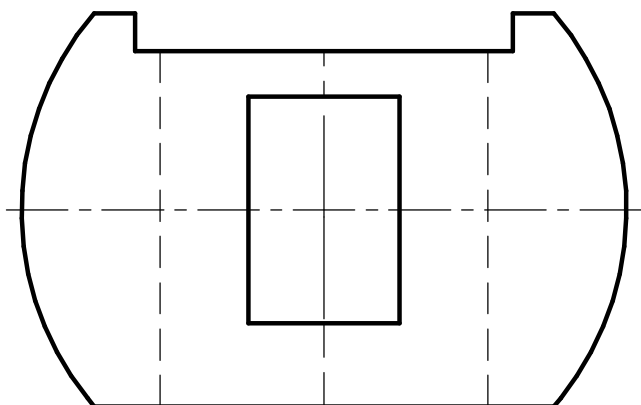
Вариант: 2

класс: 11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;*
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305–2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*





*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.*

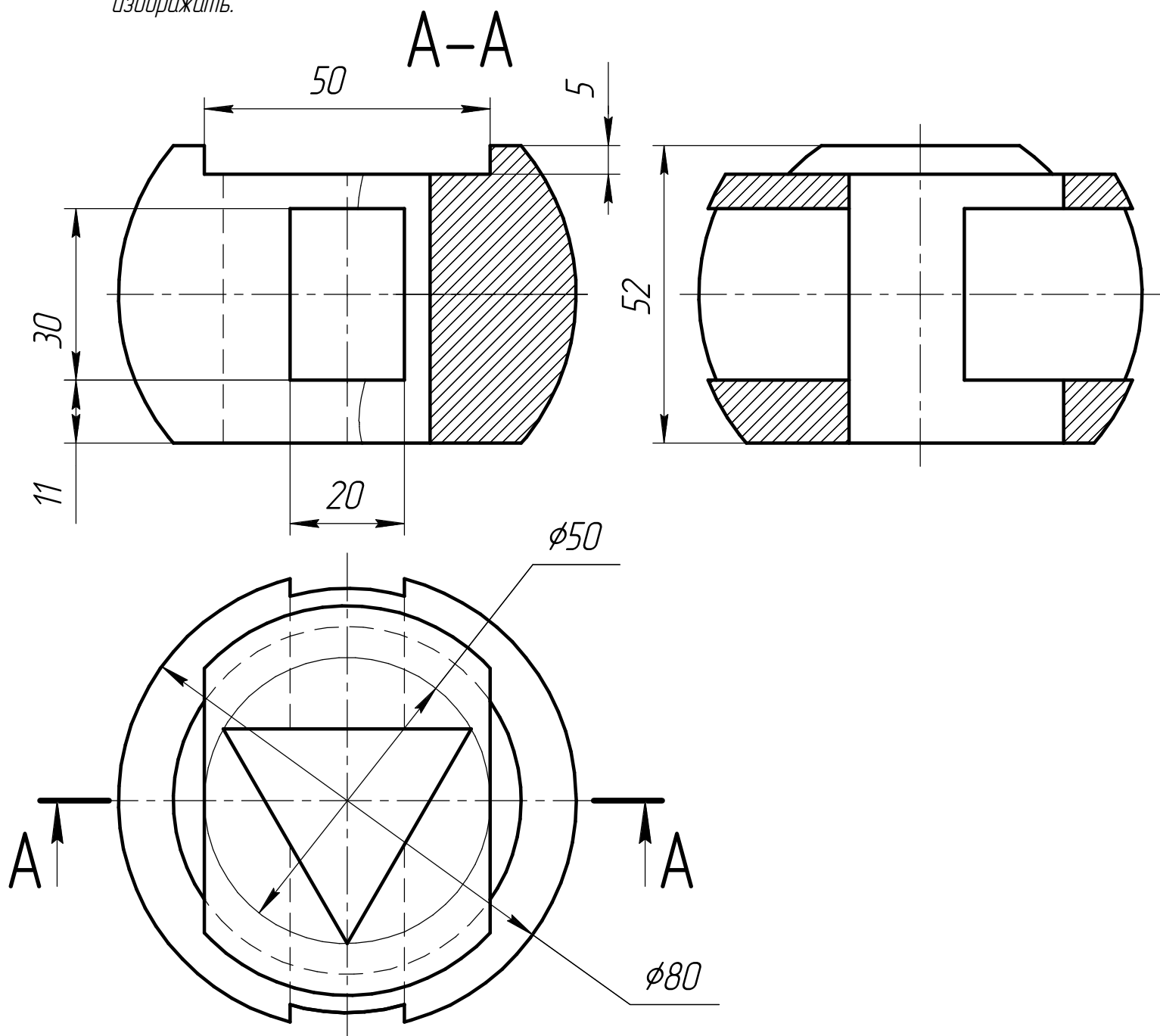
Вариант: 2

класс: 11

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;*
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305–2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*





Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по инженерной графике)

Класс: 10 и 11

Задание 4

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем выполненным критериям суммируются)	Балл
Построена фронтальная и горизонтальная проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды с соблюдением проекционной связи	4
Построены и обозначены фронтальная и горизонтальная проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе	2
Верно обозначена видимость линий конуса с вырезом	3
Изображения чертежа оформлены в соответствии с требованиями ЕСКД	1

Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем критериям суммируются)	Макс. балл
Выполнены общие требования: Построены три изображения в проекционной связи; на видах невидимый контур показан штриховой линией, на разрезах линии невидимого контура не обозначены. требования выполнены полностью: 2 балла требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	2
Верно выполнен главный вид: Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза с указанием положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза справа от линии ребра) Указанные требования выполнены полностью: 4 балла Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	4
Верно выполнен вид слева: Вид слева выполнен как полный профильный разрез без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (без указания волнистой линии разделения вида и разреза) Указанные требования выполнены полностью: 7 баллов Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза с указанием волнистой линии разделения вида и разреза: 5 баллов Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	7
Верно выполнен вид сверху (учитывать только при выполнении пункта 1): Вид сверху выполнен верно и оставлен без разреза: 1 балл Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	1
Верно обозначены размеры: Все размеры обозначены правильно: 5 баллов Не менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 4 балла Менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 0 баллов	5
Соблюдены требования ЕСКД: Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии с требованиями ЕСКД: 1 балл В изображении, толщине линии и/или штриховке есть существенные отступления от требований ЕСКД: 0 баллов	1



Профиль олимпиады:
«Компьютерное моделирование и графика»,
тур по математике и инженерной графике

Класс участия: 11

Вариант задания: 2

Задача 1 (10 баллов). Имеются n различных красок, упорядоченных по спектру цветов. Стандартный флаг состоит из 3 горизонтальных полос (верхняя шире). Цвета граничащих полос должны быть разными и не соседними по спектру. При каком наименьшем n можно получить не менее 64000 разных флагов?

Задача 2 (10 баллов). Выразить в градусах $\arcsin \frac{\sqrt{4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметр a , при которых система
$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} \leq \sqrt{10 - 2a + a^2}, \\ y = (x - a + 3)^2 + 1, \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Укажите это решение при каждом из найденных a .

Задача 4 (10 баллов). См. лист 2.

Задача 5 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 4). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Задача 6 (20 баллов). См. лист 3.

Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

Задача 1 (10 баллов). Имеются n различных красок, упорядоченных по спектру цветов. Стандартный флаг состоит из 3 горизонтальных полос (верхняя шире). Цвета граничащих полос должны быть разными и не соседними по спектру. При каком наименьшем n можно получить не менее 64000 разных флагов?

Решение:

Если цвет средней полосы — крайний в спектре, то цвет как верхней, так и нижней полосы — любой из $n-2$. Если цвет средней полосы — не крайний в спектре, то цвет как верхней, так и нижней полосы — любой из $n-3$. Общее число вариантов $2(n-2)^2 + (n-2)(n-3)^2 = 2m^2 + m(m-1)^2 = m^3 + m$, где $m = n-2$. Поскольку $m^3 < m^3 + m < (m+1)^3$, минимальным достаточным будет $m = 40$.

Ответ: 42.

Задача 2 (10 баллов). Выразить в градусах $\arcsin \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$.

Решение:

Выражение под арксинусом имеет вид

$$S = \sqrt{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

где

$$\cos \alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 105^\circ.$$

Получаем $S = \cos 52,5^\circ = \sin 37,5^\circ$.

Ответ: 37,5.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметр a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2} \leq \sqrt{10-2a+a^2}, \\ y = (x-a+3)^2 + 1, \end{cases} \quad \text{имеет} \quad \text{единственное}$$

решение. Укажите это решение при каждом из найденных a .

Решение:

Пусть $M(x; y)$, $A(-1; 1)$, $B(2; a)$.

Тогда $MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$, $MB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2}$, $AB = \sqrt{10-2a+a^2}$.

Первое неравенство системы означает, что $MA + MB \leq AB$. Это возможно лишь в том случае, если $MA + MB = AB$, и точка M лежит на отрезке AB , т.е.

$y = \frac{a-1}{3}(x+1)+1, x \in [-1; 2]$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} y = \frac{a-1}{3}(x+1)+1, x \in [-1; 2], \\ y = (x-a+3)^2 + 1. \end{cases} \text{ Следовательно, требуется определить все значения}$$

параметра a , при которых уравнение $(x-a+3)^2 + 1 = \frac{a-1}{3}(x+1)+1$ имеет

единственное решение на отрезке $[-1; 2]$. Обозначим $b = \frac{a-1}{3}$. Тогда имеем

$$(x-3b+2)^2 - b(x+1) = 0, x^2 - (7b-4)x + 9b^2 - 13b + 4 = 0, x \in [-1; 2].$$

Пусть $f(x) = x^2 - (7b-4)x + 9b^2 - 13b + 4$. Тогда уравнение

$x^2 - (7b-4)x + 9b^2 - 13b + 4 = 0$ может иметь единственное решение на отрезке $[-1; 2]$ в трех случаях.

1) $D = 13b^2 - 4b = 0, x = \frac{7b-4}{2} \in [-1; 2]$. В этом случае $b = \frac{4}{13}$, и $a = \frac{25}{13}, x = -\frac{12}{13}$.

2) $f(-1)f(2) < 0, f(-1) = 9b^2 - 6b + 1 = (3b-1)^2, f(2) = 9b^2 - 27b + 16,$

$(9b^2 - 27b + 16)(3b-1)^2 < 0 \Leftrightarrow 9(b-b_1)(b-b_2)(3b-1)^2 < 0$, где

$b_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{6}, b_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{6}$. В этом случае $b \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{6}; \frac{9+\sqrt{17}}{6}\right)$, и

$a \in \left(\frac{11-\sqrt{17}}{2}; \frac{11+\sqrt{17}}{2}\right), x = \frac{7a-19-\sqrt{(a-1)(13a-25)}}{6}$.

3) $f(-1) = 0, f(1) = (3b-1)^2 = 0, b = \frac{1}{3}, x_0 = \frac{7b-4}{2} = -\frac{5}{6}$. В этом случае на

отрезке $[-1; 2]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня $x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}$.

$f(2) = 0, f(2) = 9b^2 - 27b + 16 = 0,$

$b_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{6}, x_0 = \frac{7b-4}{2} = \frac{39+7\sqrt{17}}{12} > 2 \Rightarrow \text{на } [-1; 2] \text{ единственное решение } x = 2;$

$b_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{6}, x_0 = \frac{7b-4}{2} = \frac{39-7\sqrt{17}}{12} < 2, 2 - \frac{39-7\sqrt{17}}{12} = \frac{7\sqrt{17}-15}{12} < \frac{3}{2} \Rightarrow$

на $[-1; 2]$ два решения $x_1 = \frac{27-7\sqrt{17}}{6}, x_2 = 2$.

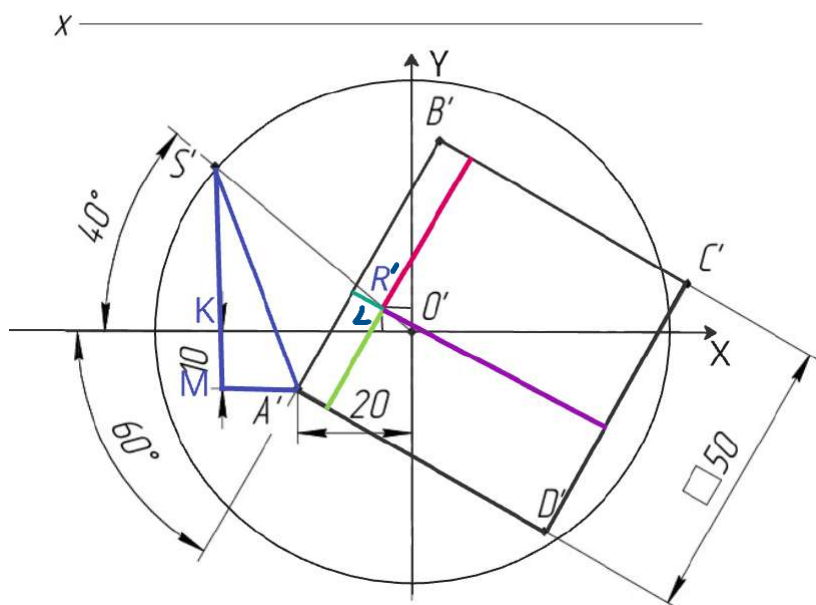
В этом случае подходит $a = \frac{11+\sqrt{17}}{2}, x = 2$.

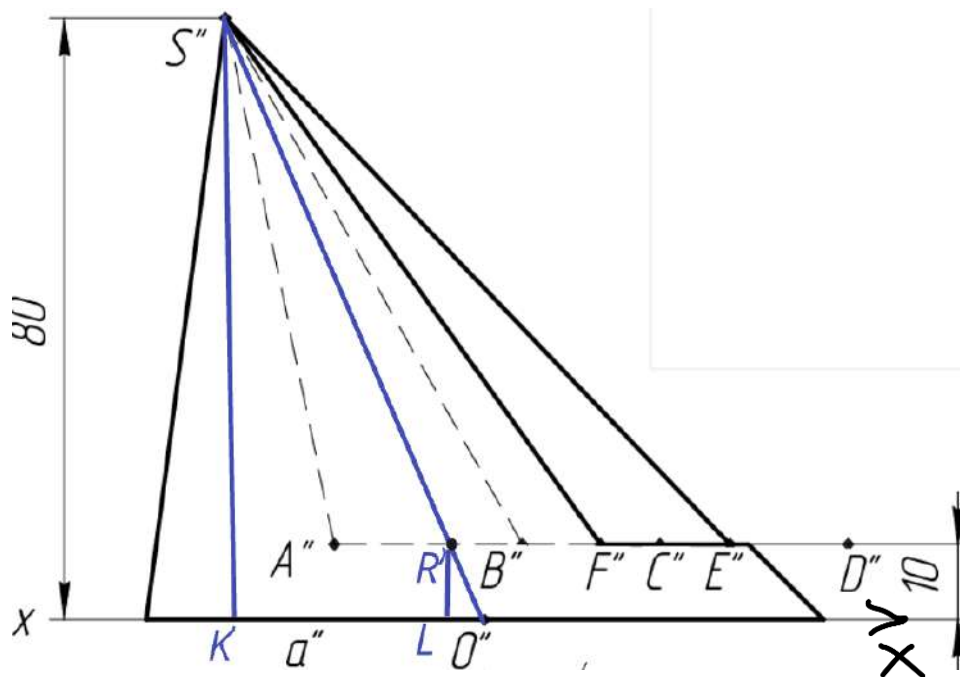
Ответ: $a \in \left\{ \frac{25}{13} \right\} \cup \left(\frac{11 - \sqrt{17}}{2}; \frac{11 + \sqrt{17}}{2} \right]$, при $a = \frac{25}{13}$, $x = -\frac{12}{13}$,

при $a \in \left(\frac{11 - \sqrt{17}}{2}; \frac{11 + \sqrt{17}}{2} \right]$, $x = \frac{7a - 19 - \sqrt{(a-1)(13a-25)}}{6}$.

Задача 4 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 5) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 5). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Решение:





Пусть R - центр сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$. В фронтальной плоскости проекций точка K – проекция на ось $O''X = O'X$ точки S'' (фронтальной проекции вершины S), точка L – проекция на ось $O''X = O'X$ точки R'' (фронтальной проекции R), $O'' = O'$. Треугольники $S''KO''$ и $R''LO''$ подобны, и $LO'' = KO''/8$. Следовательно, в горизонтальной плоскости проекций $LO' = KO'/8$.

В горизонтальной плоскости проекций рассмотрим прямоугольный треугольник $S'KO'$, $S'O' = 45$, $\cos \angle S'O'K = 0,8$, $\sin \angle S'O'K = 0,6$, $KO' = 36$, $S'K = 27$.

Тогда $LO' = 9/2$, $R'L = 27/8$.

Нужно найти расстояние от R' до сторон квадрата $A'B'C'D'$ в горизонтальной плоскости проекций. В системе координат $O'XY$ координаты точки $A'(-20; -10)$, прямая $A'B'$ составляет с положительным направлением оси $O'X$ угол 60° , и уравнение прямой $A'B'$ имеет вид $y = \sqrt{3}(x + 20) - 10$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'B'$:

$$d_{AB} = \frac{|\sqrt{3}(20 - 9/2) - 27/8 - 10|}{2} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $C'D'$:

$$d_{CD} = 50 - \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3.$$

Прямая $A'D'$ перпендикулярна прямой $A'B'$, ее уравнение $\sqrt{3}y + (x + 20) + 10\sqrt{3} = 0$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'D'$:

$$d_{AD} = \frac{|27\sqrt{3}/8 + 20 - 9/2 + 10\sqrt{3}|}{2} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $B'C'$:

$$d_{BC} = 50 - \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7.$$

Вычислим длину ребра SA . Высота H пирамиды $SABCD$ равна 70. Тогда $SA^2 = S'A'^2 + H^2$. В прямоугольном треугольнике $S'MA'$ вычислим гипотенузу $S'A'$:

$$S'M = S'K + KM = 27 + 10 = 37, \quad MA' = KO' - 20 = 36 - 20 = 16,$$

$$SA^2 = S'M^2 + MA'^2 + H^2 = 37^2 + 16^2 + 70^2 = 6525 = 225 \cdot 29.$$

$$SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8.$$

Ответ: $d_{AB} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7 \text{ мм}, d_{CD} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3 \text{ мм},$

$$d_{AD} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3 \text{ мм}, d_{BC} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7 \text{ мм}, SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8 \text{ мм}.$$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по математике)

Класс: 11

Задание 1

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Верно и обоснованно рассмотрен один из частных случаев. Итоговый ответ неверный, или итоговый ответ верный, но доказательство его истинности представлено частично.	3
Рассуждения верные, но не все утверждения строго обоснованы, представлены верные формулы без необходимых объяснений.	5
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 2

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Верно использованы необходимые тригонометрические формулы, приводящие к табличным значениям углов.	3
Проведены верные преобразования, в результате которых получено уравнение, связывающее искомый угол и угол с известной градусной мерой.	5
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 3

максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Задача сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и параболы.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (промежутки), содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке (промежутках). При этом концы промежутка (промежутков) частично совпадают с концами верных промежутков.	6
Верно найдены нужные значения параметра. Допущены ошибки при выписывании решений системы или решения системы отсутствуют. Или потеряно одно из значений параметра, при этом верно выписаны решения для остальных значений параметра.	9
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Задание 5

максимальная оценка: **8 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA или одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	2
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA и одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата. Или верно и точно вычислены все расстояния от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	4
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	6
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Все ответы даны точно, а не приближенно.	8



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

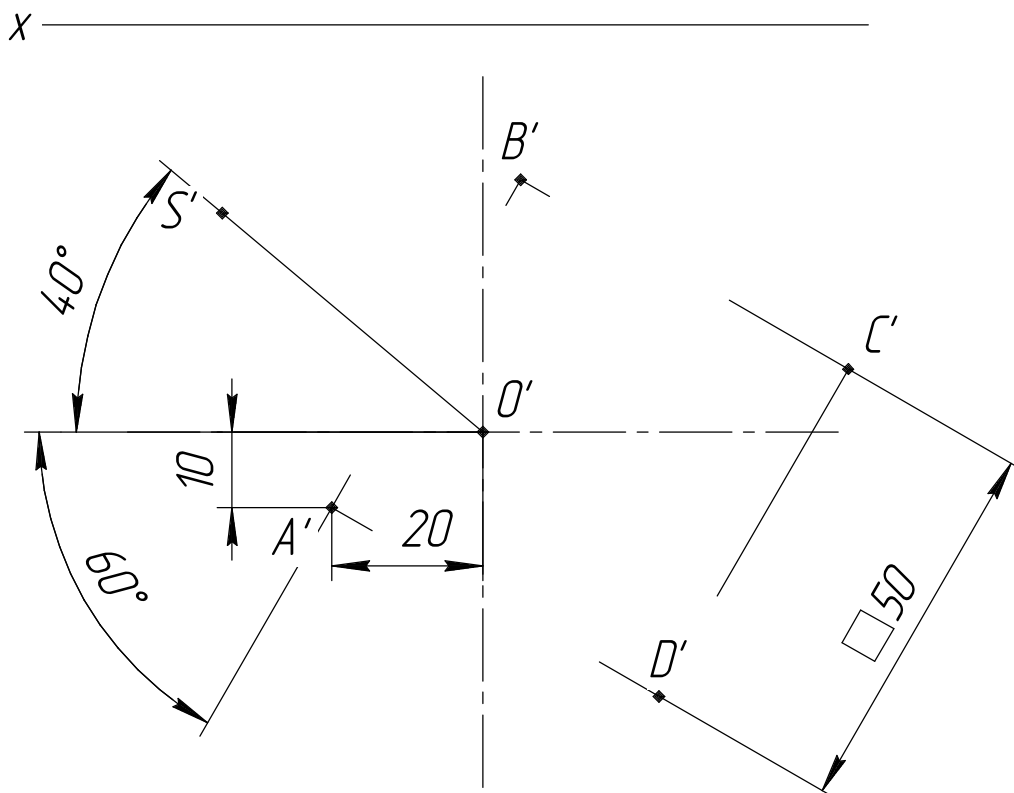
Вариант: 2

класс: 11

Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S' фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCD$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.





Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

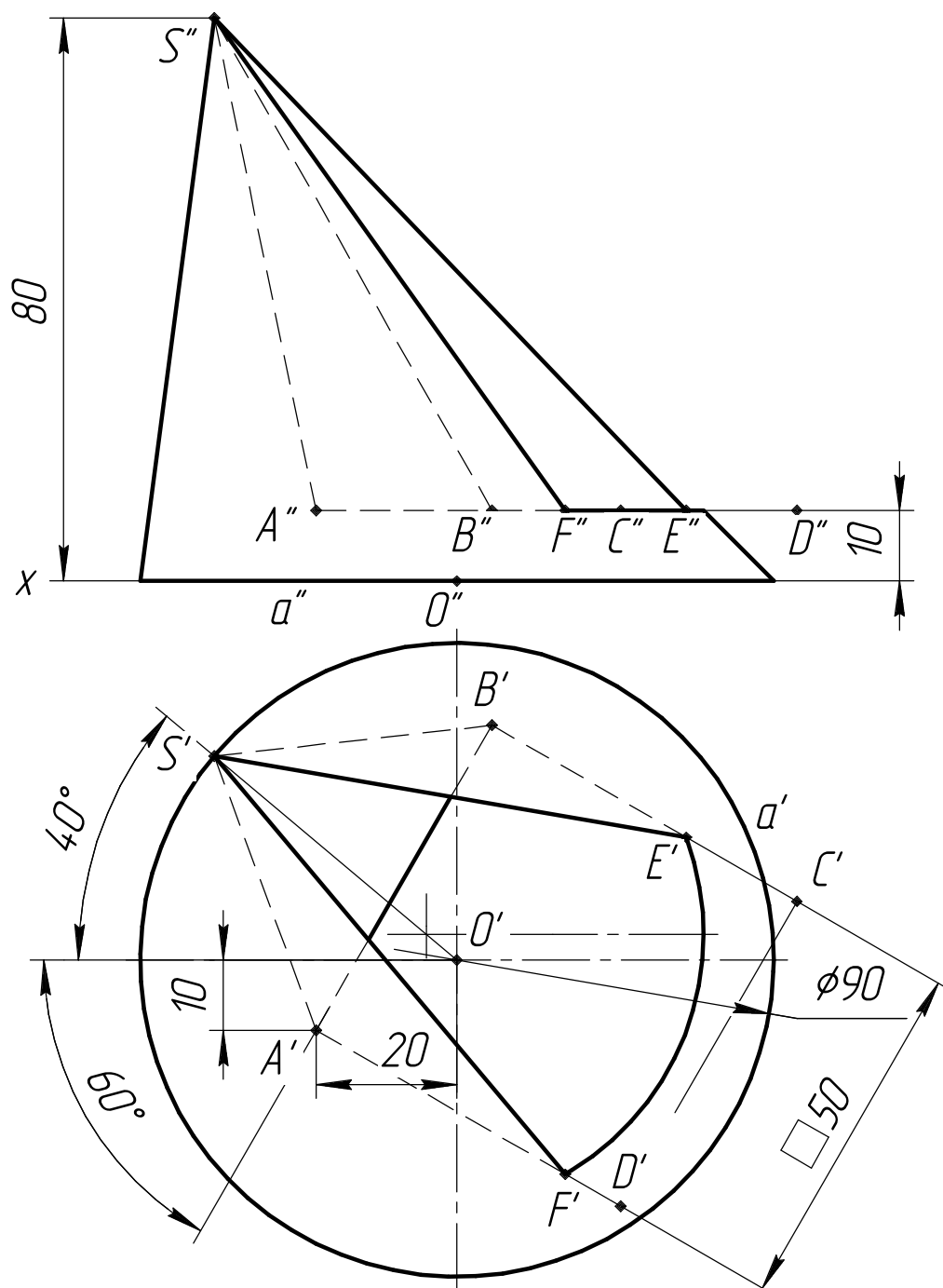
Вариант: 2

класс: 1

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCD$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.





*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.*

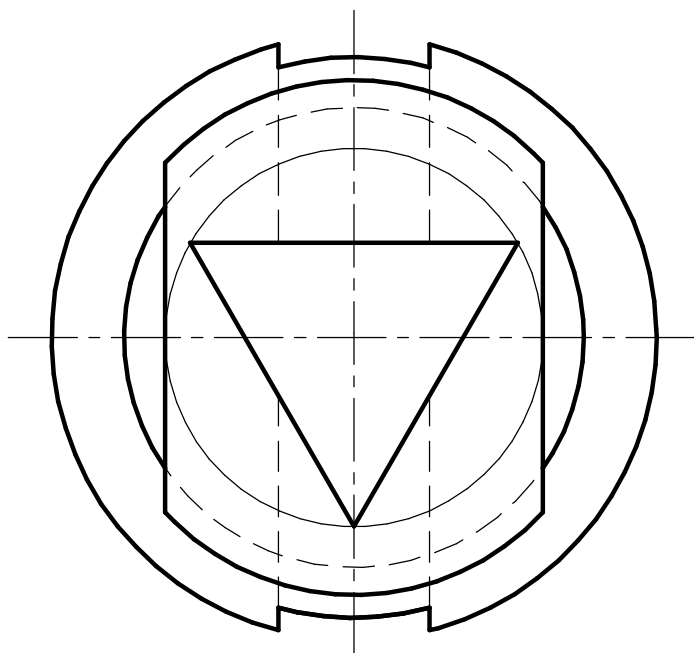
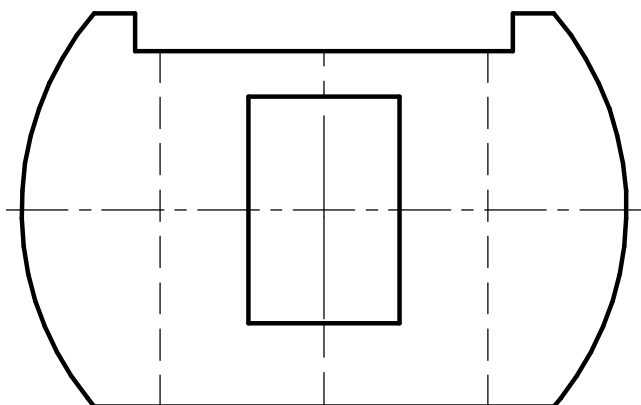
Вариант: 2

класс: 11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;*
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305–2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*





*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.*

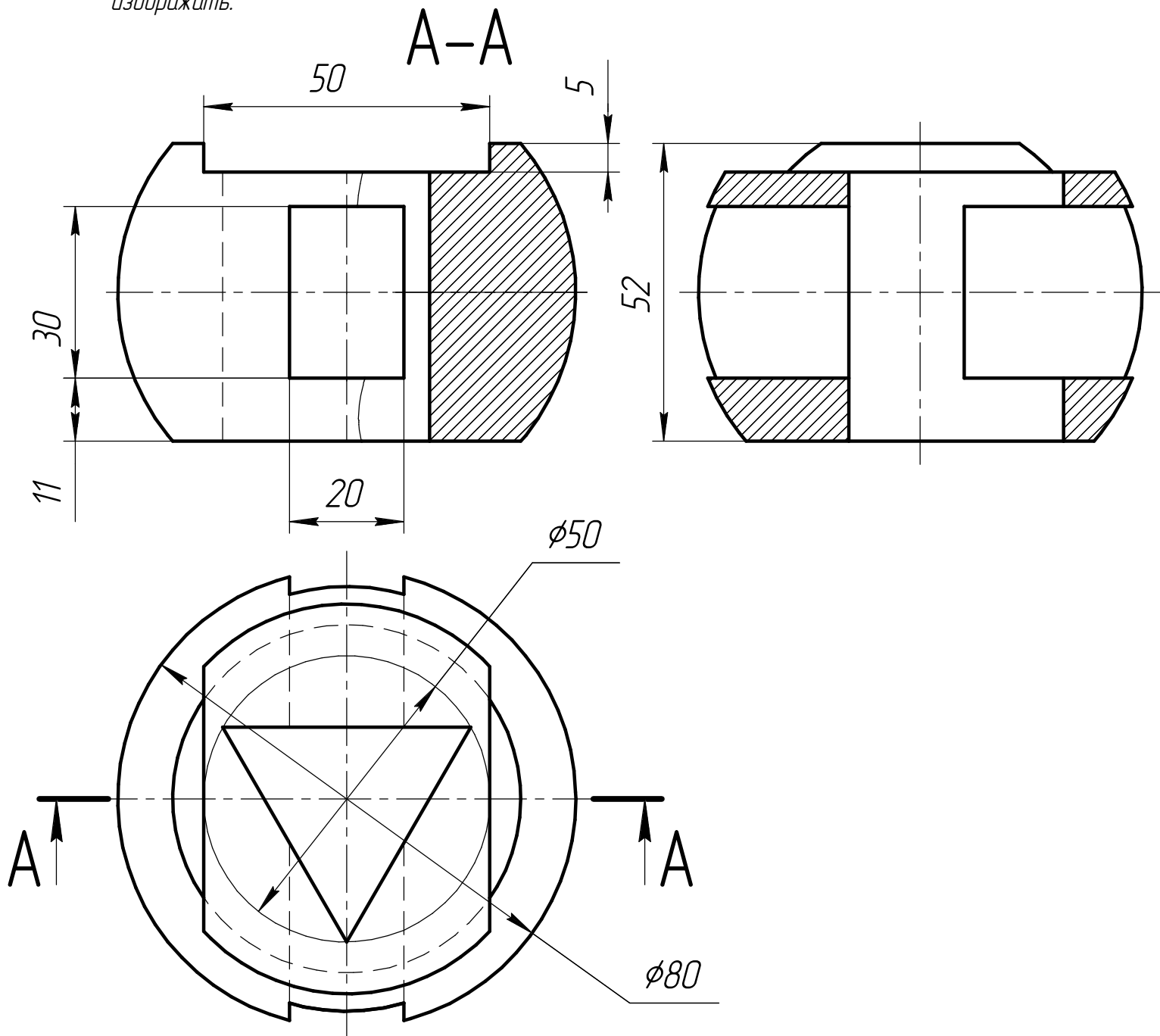
Вариант: 2

класс: 1

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;*
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305-2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011;*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*





Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по инженерной графике)

Класс: 10 и 11

Задание 4

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем выполненным критериям суммируются)	Балл
Построена фронтальная и горизонтальная проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды с соблюдением проекционной связи	4
Построены и обозначены фронтальная и горизонтальная проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе	2
Верно обозначена видимость линий конуса с вырезом	3
Изображения чертежа оформлены в соответствии с требованиями ЕСКД	1

Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем критериям суммируются)	Макс. балл
Выполнены общие требования: Построены три изображения в проекционной связи; на видах невидимый контур показан штриховой линией, на разрезах линии невидимого контура не обозначены. требования выполнены полностью: 2 балла требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	2
Верно выполнен главный вид: Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза с указанием положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза справа от линии ребра) Указанные требования выполнены полностью: 4 балла Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	4
Верно выполнен вид слева: Вид слева выполнен как полный профильный разрез без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (без указания волнистой линии разделения вида и разреза) Указанные требования выполнены полностью: 7 баллов Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза с указанием волнистой линии разделения вида и разреза: 5 баллов Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	7
Верно выполнен вид сверху (учитывать только при выполнении пункта 1): Вид сверху выполнен верно и оставлен без разреза: 1 балл Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	1
Верно обозначены размеры: Все размеры обозначены правильно: 5 баллов Не менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 4 балла Менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 0 баллов	5
Соблюдены требования ЕСКД: Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии с требованиями ЕСКД: 1 балл В изображении, толщине линии и/или штриховке есть существенные отступления от требований ЕСКД: 0 баллов	1