10-12 degree

Task 1.

1. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12, CD = 7$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 12, CD = 7$.

   Answer: 23.75

2. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 10, CD = 9$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 10, CD = 9$.

   Answer: 4.75

3. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 15, CD = 4$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 15, CD = 4$.

   Answer: 52.25

4. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 16, CD = 13$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 16, CD = 13$.

Answer: 21.75

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 8-9 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 3 for 8-9 degree.

Task 2.

1. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 6 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 2

2. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 9 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 9 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 3

3. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 4.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все

трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 4.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 1.5

4. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 7.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 7.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 2.5

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 7 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 7th degree.

Task 3.

1. В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \dots, 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 100×100 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 100 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 200, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \dots, 100k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 2550

2. В каждую клетку таблицы 200×200 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 200, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 400, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 200×200 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 200 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 400, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 10100

3. В каждую клетку таблицы 150×150 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 150, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 300, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 150×150 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 150 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 300, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 5700

4. В каждую клетку таблицы 250×250 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 250, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 500, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 250×250 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 250 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 500, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 15750

Solution (RUS). См. решение задачи №2 для 8-9 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 2 for 8-9 degree.

Task 4.

1. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_7?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
   Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_7?

   Answer: 763

2. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_8?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_8?

Answer: 1531

3. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_9?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_9?

Answer: 3067

4. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_6?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_6?

Answer: 379

Solution (RUS). Пусть a_n - количество в символов в записи A_n.
Для начала рассмотрим формулу для $a_{n+2} = 1$(открывающая скобка) $+ a_{n+1} + 1$(запятая) $+ 1$(открывающая скобка) $+ a_{n+1} + 1$(закрывающая скобка)$+ 1$(закрывающая скобка) $= 2a_{n+1} + 5 = 2(2a_n + 5) + 5 = 2^2 a_n + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^2(2a_{n-1} + 5) + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 5\frac{2^3-1}{2-1}$(сумма геометрической прогрессии).
На этом основании можно выдвинуть гипотезу:
формула для общего члена последовательности имеет длину $a_n = 2^n a_0 + 5\frac{2^n-1}{2-1} = 6 \cdot 2^n - 5$
Докажем эту формулу индукцией по $n > 0$.

База индукции: $a_0 = 1 = 6 \cdot 2^0 - 5$
Предположение индукции: $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$
Шаг индукции: $a_{n+1} = 2a_n + 5 = 2 \cdot (6 \cdot 2^n - 5) + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 5$
Таким образом, $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$.

Solution (ENG). Let a_n be the number of characters in the entry A_n.
To begin with, consider the formula for $a_{n+2} =$ 1(opening curly brace) $+$ a_{n+1}+1(comma) + 1(opening curly brace) + a_{n+1} +1(closing curly brace)+ 1(closing curly brace) $= 2a_{n+1} + 5 = 2(2a_n + 5) + 5 = 2^2 a_n + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^2(2a_{n-1} + 5) + 2^1\ cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 5\frac{2^3-1}{2-1}$(the sum of the geometric progression).
On this basis, we can hypothesize:
formula for a common term of a sequence has length $a_n = 2^n a_0 + 5\frac{2^n-1}{2-1} = 6 \cdot 2^n - 5$
Let's prove this formula by induction on $n > 0$.
Induction base: $a_0 = 1 = 6 \cdot 2^0 - 5$
Induction assumption: $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$
Induction step: $a_{n+1} = 2a_n + 5 = 2 \cdot (6 \cdot 2^n - 5) + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 5$
Thus, $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$.

Task 5.

1. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^5} = 100$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^5} = 100$$
2. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^6} = 144$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^6} = 144$$
3. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^3} = 729$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^3} = 729$$
4. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^7} = 196$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^7} = 196$$

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$ для вещественных x и докажем, что она монотонно возрастает при $x > 1$. Итак, $f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$. Для $x > 1$ имеем $\ln x > 0 > -1$, откуда $f'(x) > 0$, из чего следует монотонное возрастание $f(x)$ для $x > 1$.

Заметим, что при $0 < x \leq 1$ функция $f(x)$ принимает значения, не превосходящие 1 (число, меньшее 1, возводится в положительную степень). Из всего сказанного следует, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного положительного корня при $a > 1$.

Теперь решим уравнение $x^{x^5} = 100$, сначала преобразовав его к виду $(x^{x^5})^5 = 100^5 = 10^{10} \Rightarrow (x^5)^{x^5} = 10^{10} \Rightarrow f(x^5) = 10^{10} > 1$ для введенной ранее функции $f(x)$. Заметим, что это уравнение имеет корень $x = \sqrt[5]{10}$, при этом (согласно доказанному выше) других положительных корней у него нет.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Consider the function $f(x) = x^x$ for real x and prove that it is monotonically increasing for $x > 1$. We have $f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$. For $x > 1$ we have $\ln x > 0 > -1$, whence $f'(x) > 0$, which implies the monotonically increasing of $f(x)$ for $x > 1$.
Note that for $0 < x \leq 1$ the function $f(x)$ takes values not exceeding 1 (a number no bigger than 1 is raised to a positive power). It follows from the above that the equation $f(x) = a$ has at most one positive root for $a > 1$.

Now lets solve the equation $x^{x^5} = 100$ by first converting it to the form $(x^{x^5})^5 = 100^5 = 10^{10} \Rightarrow (x^5)^{x^5} = 10^{10} \Rightarrow f(x^5) = 10^{10} > 1$ for the previously defined function $f(x)$. Note that this equation has a root $x = \sqrt[5]{10}$, while (according to what has been proven above) it has no other positive roots.

Task 6.

1. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 20 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами пяти цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих пяти цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 20 points with a black marker, and then, using five colored markers, connected each pair of points with a line of one of these five colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

2. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 30 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами четырех цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих четырех цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 30 points with a black marker, and then, using four colored markers, connected each pair of points with a line of one of these four colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

3. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 40 точек, а затем, вооружившись

цветными маркерами шести цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих шести цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 40 points with a black marker, and then, using six colored markers, connected each pair of points with a line of one of these six colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

4. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 50 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами трех цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих трех цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 50 points with a black marker, and then, using three colored markers, connected each pair of points with a line of one of these three colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Рассмотрим произвольные 4 цвета из пяти. Пятый цвет назовём цвет A. Перекрасим линии, проведённые каждым из выбранных четырёх цветов в некоторый новый цвет, который назовём цвет B и будем доказывать задачу из условия для двух цветов.
Отмеченные точки будем называть вершинами, а линии, соединяющие пары точек - рёбрами. Пусть неверно, что каждая вершина соединена с любой другой некоторым путём цвета A. Тогда есть конкретные две вершины v_1 и v_2, которые не соединены ни одним путём целиком состоящим из рёбер цвета A. Пусть тогда V_1 - это группа всех вершин, в которые можно попасть из v_1 только по рёбрам цвета A, а V_2 - остальные вершины, то есть те, до которых по рёбрам цвета A из v_1 попасть невозможно. Тогда легко видеть, что, во-первых, v_1 принадлежит V_1, а v_2 принадлежит V_2. Во-вторых, из V_1 в V_2 не идёт ни одного ребра цвета A, иначе V_1 содержит не все вершины, которые должна содержать по определению (которые достижимы по рёбрам цвета A из v_1). Но группы V_1 и V_2 вместе составляют все вершины, обе эти две группы непусты, а также все рёбра между вершинами этих групп (когда одна вершина из одной группы, а другая - из другой) имеют цвет B.
Тогда очевидно, что любые две вершины связаны друг с другом путём цвета B (причём состоящим не более чем из двух рёбер), что и требовалось доказать.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Consider arbitrary 4 colors out of five. The fifth color will be called the color A. We will recolor the lines drawn by each of the selected four colors into some new color, which we will call the color B and we will prove the problem from the condition for two colors.
The marked points will be called vertices, and the lines connecting pairs of points will be called edges. Suppose it is not true that each vertex is connected to any other by some path of the color A. Then there are specific two vertices v_1 and v_2 that are not connected by any path consisting entirely of edges of the color A. Let then V_1 be the group of all vertices in which can be reached from v_1 only by the

edges of the color A, and V_2 are the other vertices, that is, those that cannot be reached by the edges of the color A from v_1. Then it is easy to see that, firstly, v_1 belongs to V_1, and v_2 belongs to V_2. Secondly, not a single edge of the color A goes from V_1 to V_2, otherwise V_1 does not contain all the vertices that it should contain by definition (which are reachable by edges of the color A from v_1). But the groups V_1 and V_2 are together make up all the vertices, both of these two groups are non-empty, as well as all the edges between the vertices of these groups (when one vertex is from one group and the other is from another) have the color B.

Then it is obvious that any two vertices are connected to each other by a path of color B (and consisting of no more than two edges), which was required to be proved.