10-12th degree

Task 1.

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{25} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{25} - x$ is divisible by n.

   Answer: 31

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{21} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{21} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{37} - x$ кратна n..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{37} - x$ is divisible by n.

   Answer: 127

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{17} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{17} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

Solution (RUS). Пусть $n = p^{\alpha}m$, где $(m,p) = 1, p-$ простое и $\alpha \geq 2$. Тогда подставим $x = p^{\alpha-1}m$ и получим сравнение $0 \equiv_n x$, что неверно. Значит, число n свободно от квадратов. Пусть p - производный простой делитель числа n. Тогда $x^{24} \equiv_p 1$ для всех $x = 1..., p-1$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$ для этих x. Обозначим через d НОД(p - 1, 24).Тогда $x^d \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Получается, что у уравнения $x^d - 1 \equiv_p 0$ есть p - 1 корень.

Значит, d = p - 1 и 24 $\vdots p - 1$.

Итак, мы получаем, что для любого простого делителя p числа n имеет место делимость $24 \vdots p - 1$.

Отсюда, p = 2,3,5,7,13. Таким образом, n является произведением каких-то из этих чисел. Итого получаем количество n, равное $2^5 - 1 = 31$ число.

Solution (ENG). Let $n = p^{\alpha}m$, where $(m, p) = 1, p-$ is prime and $\alpha \geq 2$. Then substitute $x = p^{\alpha-1}m$ and get a comparison of $0 \equiv_n x$, which is wrong. So the number n is free of squares.
Let p be the derived prime divisor of the number n. Then $x^{24} \equiv_p 1$ for all $x = 1..., p-1$. But $x^{p-1} \equiv_p 1$ for these x. Denote by d NOD(p - 1, 24).Then $x^d \equiv_p 1$ for all $x = 1, ..., p-1$. It turns out that the equation $x^d - 1 \equiv_p 0$ has a p - 1 root.

So d = p - 1 and 24 $\vdots p - 1$.

So we obtain that for any prime divisor p of n there is a divisibility 24 $\vdots p - 1$. Hence, p = 2,3,5,7,13. Thus, n is the product of some of these numbers. Total we get a number n equal to $2^5 - 1 = 31$ number.

Task 2.

1. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2022 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2022 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2022). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2022. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2022 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2022 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2022). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2022 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

   Answer: 11

2. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2077 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2077 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2077). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2077. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2077 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2077 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2077). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2077 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 12

3. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 1005 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 1005 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 1005). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 1005. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 1005 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 1005 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 1005). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 1005 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 10

4. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 5000 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 5000 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 5000). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 5000. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 5000 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 5000 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 5000). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 5000 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 13

Solution (RUS). Докажем более общее утверждение: если даны числа от 1 до 2^n, то минимальное количество карточек, необходимое для выигрыша, равно n. То, что Боб выиграет на n карточках, следует из такого алгоритма. Он смотрит на первую карточку, и если на ней написано меньше половины чисел, он ее переворачивает. Теперь хотя бы половина чисел присутствует. Далее он смотрит на вторую карточку, и если на ней написана меньше половины из оставшихся чисел, он ее также переворачивает, и т.д. Таким образом, после каждого своего шага он уменьшает количество ненаписанных на карточках чисел как минимум в 2 раза. Значит, после n таких действий Боб добьется желаемого. То, что $n-1$ не хватит, можно доказать индукцией по n. Для этого занумеруем все числа в двоичной системе, и на первой карточке на одной стороне запишем числа, у которых первая цифра в двоичной системе равна 0, а на другой – у которых равна 1. На второй карточке – у которых вторая цифра равна 0 или 1, и т.д. Тогда, убирая первую карточку, например, с числами, начинающимися на 1, мы оставим $n-2$ карточки и $2^{n-1}-1$ чисел, начинающихся на 0, что дает возможность применить предположение индукции. База индукции очевидна. В нашем случае нужно взять в качестве ответа $k = \lceil \log_2 2022 \rceil = 11$.

Solution (ENG). Lets prove a more general statement: if the numbers from 1 to 2^n are given, then the minimum the minimum number of cards needed to win is n. It follows from this algorithm that Bob will win on n cards. He looks at the first card, and if less than half of the numbers are written on it, he turns it. Now at least half of the numbers are present. Next, he looks at the second card, and if it has less than half of the remaining numbers written on it, he turns it, and so on. Thus, after each step he reduces the number of numbers not written on the cards by at least 2 times. So, after n of such actions Bob will get what he wants. The fact that n - 1 is not enough can be proved by induction on n. To do this, we will number all the numbers in binary, and on the first card, on one side, write the numbers whose first digit in binary is 0, and on the other side, those whose first digit is 1. On the second card, write numbers whose second digit equals 0 or 1, and so on. Then, removing the first card, for example, with numbers beginning with 1, we will leave n - 2 cards and 2^{n-1}-1 numbers beginning with 0, allowing us to apply the induction assumption. The basis of induction is obvious. In our case, the answer is $k = \lceil \log_2 2022 \rceil = 11$.

Task 3.

1. На шахматной доске 6×6 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 6×6 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 9

2. На шахматной доске 8×8 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 8×8 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 16

3. На шахматной доске 10×10 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 10×10 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 25

4. На шахматной доске 12×12 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 12×12 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 36

Solution (RUS). Рассмотрим белую непобитую клетку доски 6×6. Поскольку в одной строке с ней есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих столбцах стоит хотя бы одна ладья. Аналогично, в одном столбце с непобитой белой клеткой есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих строках стоит хотя бы одна ладья. Значит, есть не менее 3 целиком побитых столбцов и не менее 3 целиком побитых строк. Значит, останется не более 3 целиком непобитых столбцов и не более 3 целиком непобитых строк. На их пересечении будет не более 9 непобитых белых клеток.

Легко привести пример, показывающий точность нашей оценки: поставьте ладью в одну из угловых белых клеток. Затем поставьте по 2 ладьи через 1 и через 3 клетки в строке и в столбце выбранной угловой клетки.

Solution (ENG). Consider the white unbroken cell of the 6×6 board. Since there are no more than 3 black cells in the same row with it, each of which must be beaten by some rook, then there is at least one rook in the corresponding columns. Similarly, in one column with an unbroken white cell there are no more than 3 black cells, each of which must be beaten by some rook, then there is at least one rook in the corresponding rows . This means that there are at least 3 completely broken columns and at least 3 completely broken rows. This means that there will be no more than 3 completely unbroken columns and no more than 3 completely unbroken lines. At their intersection there will be no more than 9 unbroken white cells.

It is easy to give an example showing the accuracy of our estimate: put a rook in one of the corner white squares. Then put 2 rooks through 1 and through 3 cells in the row and column of the selected corner cell.

Task 4.

1. Дана колода из 11 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 5 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 6 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 11 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
   2) Remove 5 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 6 cards without changing their order.
   How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 110

2. Дана колода из 13 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 6 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 7 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 13 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
   2) Remove 6 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 7 cards without changing their order.
   How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 156

3. Дана колода из 15 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 7 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 8 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 15 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
   2) Remove 7 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 8 cards without changing their order.
   How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 210

4. Дана колода из 17 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 8 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 9 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 17 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.

2) Remove 8 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 9 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 272

Solution (RUS). Пусть количество карт в колоде равно $2n+1$. Обозначим через μ_k первую тасовку, где снимается k верхних карт, а через λ - вторую тасовку. Заметим, что $\mu_l\mu_k = \mu_{l+k}$, $\lambda^{2n} = 1$ и $\lambda\mu_k\lambda^{-1} = \mu_l$, где $l \equiv_{2n+1} (n+1)k$. Поэтому любая комбинация перестановок λ и μ_k сводится к комбинациям вида $\mu_t\lambda^{2n-1}, \ldots, \mu_t\lambda$ и μ_t, причем все такие перестановки различны. Ясно, что перестановок каждого вида ровно $2n$ а всего их $2n+1$. Итого получаем $2n(2n+1)$.

Solution (ENG). Let the number of cards in the deck be $2n+1$. Denote by μ_k the first shuffle, where k of the top cards are removed, and by λ - the second shuffle. Note that $\mu_l\mu_k = \mu_{l+k}$, $\lambda^{2n} = 1$ and $\lambda\mu_k\lambda^{-1} = \mu_l$, where $l \equiv_{2n+1} (n+1)k$. Therefore, any combination of permutations λ and μ_k reduces to combinations of the form $\mu_t\lambda^{2n-1}, \ldots, \mu_t\lambda$ and μ_t, and all such permutations are different. It is clear that there are exactly $2n$ permutations of each kind, and there are $2n+1$ in total. In total, we get $2n(2n+1)$.

Task 5.

1. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 2*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7*см*, а радиус $4/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 2 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 7 *cm*, and the radius is $4/\pi$ *cm*.

2. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 3*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в

точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки $8 см$, а радиус $5/\pi$ $см$.

A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 cm on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 8 cm, and the radius is $5/\pi$ cm.

3. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины $4 см$ поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки $5 см$, а радиус $2/\pi$ $см$.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 2 cm on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 5 cm, and the radius is $2/\pi$ cm.

4. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины $3 см$ поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки $7 см$, а радиус $3/\pi$ $см$.

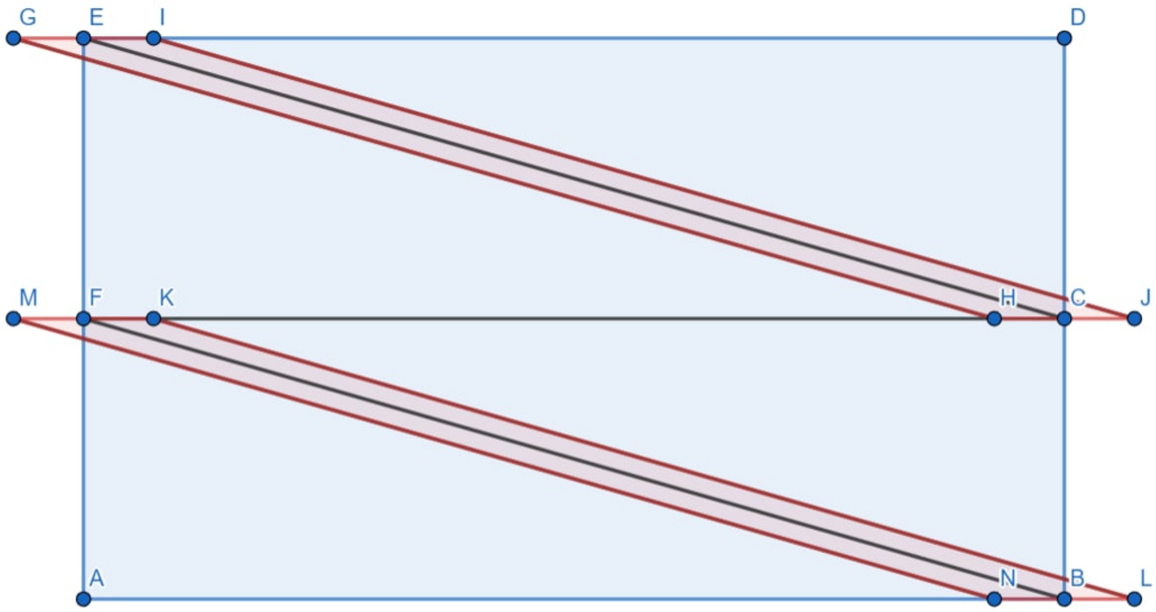
   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 cm on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 7 cm, and the radius is $3/\pi$ cm.

Solution (RUS). Докажем, что если отклеить полосу, то она будет являться параллелограммом. Во-первых, представим, муха ползла не по поверхности кружки, а по бумажной подкладке, в которую предварительно обернули кружку: подкладка прямоугольной формы, размер $7 \times l$, где l - длина окружности дна кружки, то есть $2\pi \cdot \dfrac{4}{\pi} = 8$. Как известно, такой лист можно свернуть в цилиндр высоты 7 и радиуса $4/\pi$, то есть как раз подходящим, чтобы поместить внутрь кружку из условия. Поместим этот лист так, чтобы вертикальный шов (вдоль которого совмещаются противоположные края этого листа длины 7) начинался и заканчивался соответственно, в точках начала и окончания пути мухи они как раз находятся на одной вертикали относительно дна кружки.

Во-вторых, повторим маршрут мухи на этой обёртке (карандашом) это будет линия, которая начинается в одном углу прямоугольной обёртки и заканчивается в противоположном углу, причјм эта линия пересекает шов (то есть обе стороны листа длины 7) один раз, так как на поверхности цилиндра, покрытого этим листом, совершает два полных оборота. Докажем, что на развёрнутом листе бумаги (смотреть иллюстрацию) эта линия превращается в два отрезка. Действительно, по условию, муха перемещалась с постоянной вертикальной скоростью. Вертикальная скорость (относительно кружки), при повторении движения на развёрнутом листе објртки, превращается в скорость перемещения точки по поверхности листа вдоль стороны длины 7. То есть виртуальная модель мухи, повторяющая траекторию мухи на обёртке со скоростью реальной мухи, имеет постоянную скорость вдоль направления стороны длины 7.

Легко видеть, что угловая скорость мухи превращается в скорость виртуальной мухи вдоль стороны длины 8 листа бумаги просто домножением на коэффициент 2π. Значит, скорость виртуальной мухи в этом направлении также постоянна. Тогда, считая стороны листа објртки осями O_x и O_y, имеем, что x и y компоненты скорости виртуальной мухи постоянны. Тогда и общий вектор скорости виртуальной мухи, который равен сумме своих $x-$ и $y-$ проекций, является постоянным. То есть, кроме момента пересечения шва обёртки, траектория движения мухи прямолинейна.

Таким образом, получаем, что липкая лента приклеена вдоль прямой линии, если смотреть по обёртке, и обрезана вдоль сторон длины 8 этой обёртки, то есть вдоль прямых параллельных линий на развёртке. То есть липкая лента имеет форму параллелограмма (при отклеивании и выравнивании на плоскости), а средняя линия этого параллелограмма совпадает с траекторией мухи. Траектория мухи это два отрезка на обёртке (отрезки $EC - FB$), которые можно представить в виде одной целой диагонали листа размера $7 \times (2 \cdot 8)$, который получается прикладываем двух экземпляров обёртки вдоль шва. Таким образом, длина траектории равна $\sqrt{7^2 + 16^2} = \sqrt{305}$, а площадь липкой ленты длина средней линии параллелограмма на толщину параллелограмма (то есть 2 см). Итого, ответ $2\sqrt{305}$ см^2.



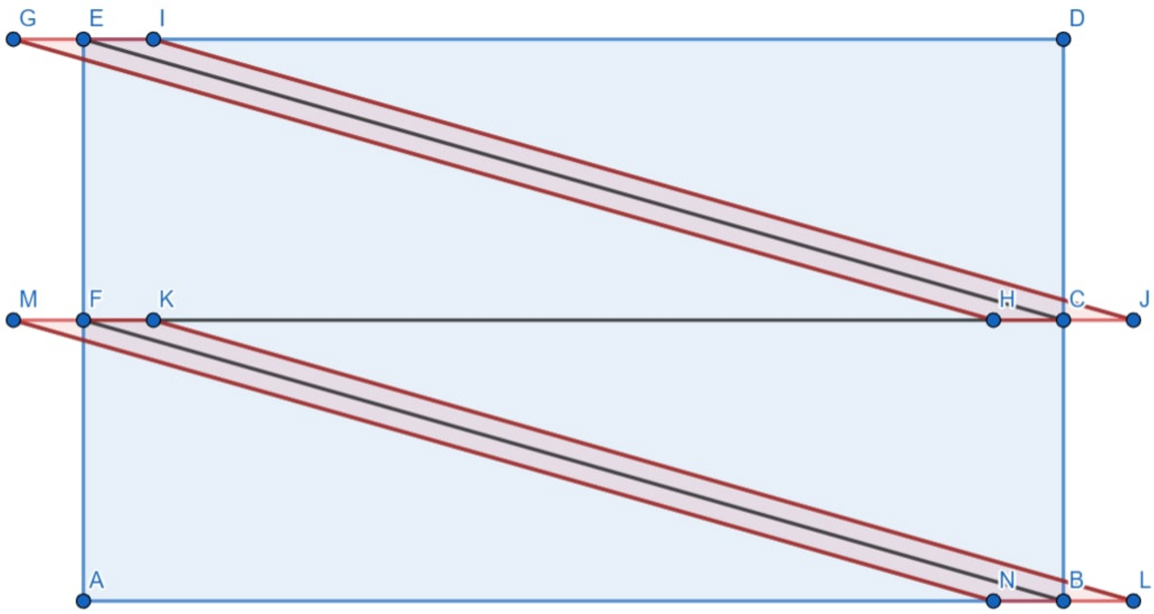
Замечание: Многие участники рассматривали случай прямоугольной ленты, отчего в своих решениях они вычитали "лишнюю"часть, за такие решения мы так же ставили полный балл.

Solution (ENG). We prove that if we peel off the strip, then it will be a parallelogram. First, imagine that the fly was crawling not on the surface of the mug, but on the paper lining in which the mug was previously wrapped: a rectangular lining, size $7 \times l$, where l is the circumference of the bottom of the mug, that is, $2\pi \cdot \dfrac{4}{\pi}$ =8. As you know, such a sheet can be rolled into a cylinder with a height of 7 and a radius of $4/\pi$, that is, just right to put a mug from the condition inside. Let's place this sheet so that the vertical seam (along which the opposite edges of this sheet of length 7 are combined) begins and ends, respectively, at the points of the beginning and end of the fly's path, they are just on the same vertical relative to the bottom of the circle.

Secondly, we will repeat the route of the fly on this wrapper (with a pencil) this will be a line that starts in one corner of the rectangular wrapper and ends in the opposite corner, so this line crosses the seam (that is, both sides of the sheet of length 7) once, since it makes two complete turns on the surface of the cylinder covered with this sheet. Let's prove that on an expanded sheet of paper (see illustration) this line turns into two segments. Indeed, by convention, the fly moved at a constant vertical speed. The vertical velocity (relative to the circle), when repeating the movement on the unfolded sheet of paper, turns into the velocity of the point moving along the surface of the sheet along the side of the length 7. That is, a virtual model of a fly repeating the trajectory of a fly on a wrapper at the speed of a real fly has a constant velocity along the direction of the side of the length 7.

It is easy to see that the angular velocity of a fly turns into the velocity of a virtual fly along the side of the 8 length of a sheet of paper by simply multiplying by a factor of 2π. This means that the speed of the virtual fly in this direction is also constant. Then, counting the sides of the sheet of paper with the axes O_x and O_y, we have that the x and y components of the velocity of the virtual fly are constant. Then the general velocity vector of the virtual fly, which is equal to the sum of its $x-$ and $y-$ projections, is constant. That is, except for the moment of crossing the seam of the wrapper, the trajectory of the fly is rectilinear.

Thus, we get that the sticky tape is glued along a straight line, if you look at the wrapper, and cut along the sides of the length 8 of this wrapper, that is, along straight parallel lines on the scan. That is, the sticky tape has the shape of a parallelogram (when peeling off and aligning on a plane), and the middle line of this parallelogram coincides with the trajectory of the fly. The trajectory of the fly is two segments on the wrapper (segments $EC - FB$), which can be represented as one whole diagonal of a sheet of size $7 \times (2 \cdot 8)$, which is obtained by applying two copies of the wrapper along the seam. Thus, the length of the trajectory is equal to $\sqrt{7^2 + 16^2} = \ sqrt305$, and the area of the adhesive tape is the length of the middle line of the parallelogram by the thickness of the parallelogram (that is, 2 cm). In total, the answer is $2\sqrt{305}$ cm^2.



Note: Many participants considered the case of a rectangular ribbon, which is why they deducted the "extra"part in their decisions, we also gave a full score for such solutions.

Task 6.

1. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 1 и π соответственно, что $g + h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 1 and π respectively such that $g + h$ is also a periodic function?

2. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 3 и π соответственно, что $g - h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 3 and π respectively such that $g - h$ is also a periodic function?

3. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 2 и $\pi/2$ соответственно, что $g+h$ – тоже периодическая функция?

A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

Is it possible to construct functions g и h with periods 2 and $\pi/2$ respectively such that $g+h$ is also a periodic function?

4. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 6 и 2π соответственно, что $g-h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 6 and 2π respectively such that $g-h$ is also a periodic function?

Solution (RUS). Сразу отметим, что такие функции существуют, и их достаточно много. Приведем в пример одну возможную комбинацию:

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{если } x = m + n\pi, \text{ где } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -n, & \text{если } x = m + n\pi, \text{ где } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда в любой точке x, которая не представима в виде $m+n\pi$, функция $h(x) = f(x) + g(x)$ равна 0. Если же $x = n + m\pi$, имеем $h(x) = m - n = (m+1) - (m+1) = f(x + (1+\pi)) + g(x + (1+\pi))$. Значит, $h(x)$ – периодическая функция с периодом $1+\pi$.

Solution (ENG). Let's show that there are such functions. There are many possible options, let's show one of them:

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{if } x = m + n\pi, \text{ where } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -n, & \text{if } x = m + n\pi, \text{ where } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence for any $x \neq m + n\pi$, function $h(x) = f(x) + g(x)$ equals 0. On the other hand, if $x = n + m\pi$, obtain $h(x) = m - n = (m+1) - (m+1) = f(x + (1+\pi)) + g(x + (1+\pi))$. Hence, $h(x)$ – periodic funciton with period $1+\pi$.