10-12th degree

Task 1. В пространстве даны четыре попарно неравных и попарно параллельных отрезка A_iB_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что точки пересечения продолжений боковых сторон шести трапеций $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \le i < j \le 4)$ лежат в одной плоскости.

In a space there are four pairwise unequal and pairwise parallel segments A_iB_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Prove that the intersection points of the extensions of the side edges of the six trapezoids $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \le i < j \le 4)$ lie in the same plane.

Solution (RUS). Обозначим через O_{ij} точку пересечения боковых сторон трапеции $A_iB_iA_jB_j$. Тогда точка O_{ij} является центром гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей отрезок A_iB_i в отрезок A_jB_j. По теореме о трех центрах гомотетии точки O_{ij}, O_{jk}, O_{ki} лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через l_{ijk} и докажем, что все такие прямые лежат в одной плоскости.

Для этого будем последовательно рисовать их. Сначала проведем прямые l_{123} и l_{124}: они лежат в одной плоскости π, т.к. пересекаются в точке O_{12}. Прямая l_{134} пересекает l_{123} в точке O_{13}, а прямую l_{124} – в точке O_{14}, поэтому она также лежит в плоскости π. Наконец, прямая l_{234} пересекает прямую l_{123} в точке O_{23}, а прямую l_{124} – в точке O_{24}, так что и она лежит в плоскости π.

Итак, все четыре прямые лежат в одной плоскости, и в ней же лежат все шесть точек O_{ij}, что и требовалось доказать.

Solution (ENG). Lets denote by O_{ij} the intersection point of the side edges of the trapezoid $A_iB_iA_jB_j$. Then the point O_{ij} is the center of a homothety with a positive coefficient transforming the segment A_iB_i into the segment A_jB_j. By the theorem on three homothety centers, the points O_{ij}, O_{jk}, O_{ki} lie on the same line – lets denote the line as l_{ijk} and prove that all such lines lie in the same plane.

To do that, we will draw them one-by-one. First, let's draw the lines l_{123} and l_{124}: they lie in the same plane π because they intersect at the point O_{12}. The line l_{134} intersects l_{123} at the point O_{13}, and the line l_{124} at the point O_{14}, so it also lies in the plane π. Finally, line l_{234} intersects line l_{123} at point O_{23}, and line l_{124} at point O_{24}, so that it also lies in the same plane π.

Thus, all four lines lie in the same plane, and all six points O_{ij} lie in the same plane, which was to be proved.

Task 2. Натуральные числа вида $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (десятичная запись состоит из n единиц) будем обозначать R_n. Докажите, что существует такое натуральное число k, что R_n делится на 41 тогда и только тогда, когда n делится на k.

Lets denote positive integers of the form $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (the decimal notation consists of n digits «1») as R_n. Prove that there exists a positive integer k such that R_n is divisible by 41 if and only if n is divisible by k.

Solution (RUS). Заметим, что $R_n = \frac{10^n-1}{9}$. Так как числа 9 и 41 взаимно просты, то R_n кратно 41 тогда и только тогда, когда $10^n - 1$ кратно 41. Поскольку 41 – простое, согласно малой теореме Ферма $10^{40} - 1$ кратно 41. Рассмотрим все натуральные d, при которых $10^d - 1$ кратно 41; наименьшее такое d обозначим за m.

Если n делится на m, то $10^n - 1 = 10^{tm} - 1 = (10^m - 1)(10^{(t-1)m} + 10^{(t-2)m} + \cdots + 10^m + 1)$, т.е. $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$, а значит, и на 41, что и требовалось.

В обратную сторону: если 10^n-1 кратно 41, то рассмотрим НОД$(10^n-1, 10^m-1)$. Воспользуемся известным свойством наибольшего общего делителя: НОД$(a, b) =$ НОД$(a-kb, b)$ для натуральных

a, b, k. Теперь
НОД$(10^n - 1, 10^m - 1) =$ НОД$(10^n - 1 - 10^{n-m}(10^m - 1), 10^m - 1)$,
НОД$(10^n - 1 - 10^n + 10^{n-m}, 10^m - 1) =$ НОД$(10^{n-m} - 1, 10^m - 1)$.
Повторяя эти действия, убеждаемся, что в конце получается число $10^{\text{НОД}(n,m)} - 1$.

Если n не делится на m, то НОД$(n, m) < m$, а значит, m – не минимальное натуральное число, при котором $10^m - 1$ кратно 41 – противоречие. Значит, n кратно m, что и требовалось доказать.

Solution (ENG). Note that $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$. Since the numbers 9 and 41 are co-prime, then R_n is a multiple of 41 if and only if $10^n - 1$ is a multiple of 41. Since 41 is prime, by Fermat's Little Theorem $10^{40} - 1$ is a multiple of 41. Consider all positive integers d such that $10^d - 1$ is a multiple of 41; the smallest such d is denoted by m.

If n is divisible by m, then $10^n - 1 = 10^{tm} - 1 = (10^m - 1)(10^{(t-1)m} + 10^{(t-2)m} + \cdots + 10^m + 1)$, i.e. $10^n - 1$ is divisible by $10^m - 1$, and hence also by 41, as required.

Lets prove it backwards: if $10^n - 1$ is a multiple of 41, then consider $\gcd(10^n - 1, 10^m - 1)$. Let's use the well-known property of the greatest common divisor (or greatest common factor): $\gcd(a, b) = \gcd(a - kb, b)$ for integers a, b, k. Now
$\gcd(10^n - 1, 10^m - 1) = \gcd(10^n - 1 - 10^{n-m}(10^m - 1), 10^m - 1)$,
$\gcd(10^n - 1 - 10^n + 10^{n-m}, 10^m - 1) = \gcd(10^{n-m} - 1, 10^m - 1)$.
Repeating these steps, we ensure that at the end we get the number $10^{\gcd(n,m)} - 1$.

If n is not divisible by m, then $\gcd(n, m) < m$, which means that m is not the smallest positive integer such that $10^m - 1$ is a multiple of 41 – that gives us a contradiction. Hence, n is a multiple of m, which was to be proved.

Task 3. Пусть a, b, c – взаимно простые в совокупности натуральные числа, и

$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

Найдите все возможные значения D_n, где n – натуральное число, кратное 3.

Запись $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ обозначает наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.
Целые числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ называются ***взаимно простыми в совокупности****, если $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$.*

Let a, b, c be mutually co-prime positive integers, and

$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

Find all possible values of D_n while n is a positive integer divisible by 3.

The notation $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ denotes the greatest common divisor of the integers $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.
Integers $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ are being called ***mutually co-prime*** *if $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$.*

Solution (RUS). Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – элементарные симметрические многочлены и $s_n = a^n + b^n + c^n$. Воспользуемся формулой Ньютона

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

Докажем, что $D_n = 1, 2, 3$ или 6. Предположим, что существуют такие взаимно простые в совокупности a, b, c, что D_n отличен от $1, 2, 3, 6$. Докажем, что тогда $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ имеют общий делитель, больший 1. В самом деле, из формул Ньютона следует, что при разложении s_n через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ моном, не содержащий σ_1 и σ_2, с точностью до знака имеет вид $3\sigma_3^{n/3}$. Поэтому если D_n делит $s_1 = \sigma_1$ и D_n делит $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, то D_n делит $\sigma_1, 2\sigma_2, 3\sigma_3$.

При D_n, отличном от $1, 2, 3, 6$ у чисел $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ есть общий делитель, больший 1. Пусть p – простой множитель, входящий в этот делитель. Тогда p делит abc, откуда (без ограничения общности) p делит a. Но тогда p делит $(ab + bc + ca)$ и p делит bc, т.е. (без ограничения общности) p делит b. Наконец, из того, что p делит $(a + b + c)$, получаем, что p делит c – противоречие с $(a, b, c) = 1$.

Итак, $D_n = 1, 2, 3$ или 6. Наборы $(1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 4, 7)$ реализуют $D_n = 2, 3$ и 6. Для $D_n = 1$ возьмем простое число $p > 3$ и положим $a = b = 1$, $c = p - 2$. Тогда $a + b + c = p$ и p не делит $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 4p + 6$, откуда $D_n = 1$.

Solution (ENG). Let $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ be elementary symmetric polynomials and $s_n = a^n + b^n + c^n$. We'll use Girard-Newton's formula

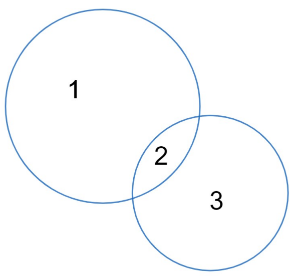
$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

Lets prove that $D_n = 1, 2, 3$ or 6. Assume that there are mutually co-prime a, b, c such that D_n is different from $1, 2, 3, 6$. Lets prove that then $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ have a common divisor greater than 1. Indeed, it follows from Girard-Newton's formula that when s_n is represented in terms of $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a monomial that does not contain σ_1 and σ_2 has (up to sign) the form $3\sigma_3^{n/3}$. So, if D_n divides $s_1 = \sigma_1$ and D_n divides $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, then D_n divides $\sigma_1, 2\sigma_2, 3\sigma_3$.

For D_n being different from $1, 2, 3, 6$ the numbers $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ have a common divisor greater than 1. Let p be a prime factor of the divisor. Then p divides abc, whence (without loss of generality) p divides a. But then p divides $(ab + bc + ca)$ and p divides bc, i.e. (without loss of generality) p divides b. Finally, from the fact that p divides $(a + b + c)$, we get that p divides c, which gives us a contradiction with $(a, b, c) = 1$.

So, $D_n = 1, 2, 3$ or 6. The sets $(1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 4, 7)$ realize $D_n = 2, 3$ and 6. For $D_n = 1$, we take a prime number $p > 3$ and set $a = b = 1$, $c = p - 2$. Then $a + b + c = p$ and p does not divide $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 4p + 6$, and $D_n = 1$.

Task 4. На плоскости нарисовано несколько окружностей, причем каждая пара окружностей пересекается ровно в двух точках, и никакие три окружности не имеют общей точки. *Круглосторонник* – это часть плоскости, со всех сторон ограниченная дугами этих окружностей, граница которой состоит из каких-то дуг этих окружностей, причем между любыми двумя внутренними точками круглосторонника можно пройти, не пересекая ни одной дуги данных окружностей.
Например, ниже изображены две окружности, образующие 3 *круглосторонника, обозначенные номерами* 1, 2 *и* 3.

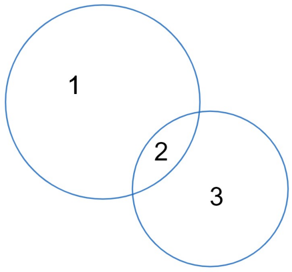


Смежные круглосторонники – это круглосторонники, имеющие общую дугу окружности в качестве границы, причем дуга должна быть невырожденной, то есть не сводящейся к одной точке.
Например, на рисунке выше смежными являются круглосторонники 1 *и* 2, 2 *и* 3, *но не* 1 *и* 3.

Для какого наименьшего $C \geq 2023$ можно нарисовать окружности так, что выполнены условия, перечисленные выше, и эти окружности образовывали ровно C круглосторонников?

Докажите, что для любого расположения нарисованных окружностей на плоскости, удовлетворяющих перечисленным условиям и образующих не менее 2023 круглосторонников, обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами.

Several circles are drawn on the plane, with each pair of the circles intersecting at two points, and no three circles have a common point. Let's call *round-gon* a part of a plane with its boundaries consisting of some arcs of these circles, such that it is possible to pass between any two internal points without crossing any of the arcs of these circles .
For example, below are two circles that form a 3 *round-gons labeled* $1, 2,$ *and* 3.



Adjacent round-gons are those having a common circular arc as a boundary, and the arc must be not be a single point.
For example, in the picture above the round-gons 1 *and* 2, 2 *and* 3 *are adjacent, but round-gons* 1 *and* 3 *are not adjacent.*

For what smallest $C \geq 2023$ can circles be drawn in such way that the conditions listed above are satisfied and these circles form exactly C round-gons?

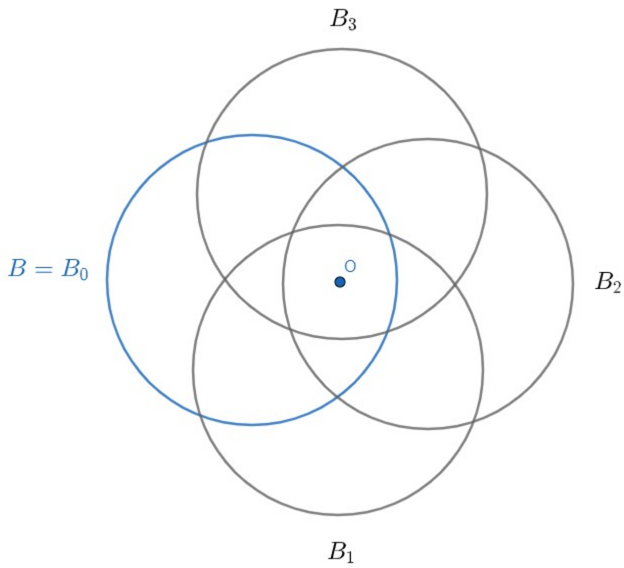
Prove that for any arrangement of the circles on the plane that satisfies the conditions listed and forms at least 2023 round-gons, there must be a round-gon bounded by less than 4 circular arcs.

Solution (RUS). Рассмотрим нарисованные окружности как плоский мультиграф (граф с кратными ребрами между вершинами): вершины – точки пересечений, ребра – дуги нарисованных окружностей, ограниченные точками пересечений. В такой интерпретации круглосторонники – это все грани этого графа, кроме «внешней» (т.е. части плоскости, лежащей вне всех окружностей).

Пусть нарисованы ровно m окружностей. Согласно формуле Эйлера для плоских графов, $V - E + F = 2$, где V – число вершин графа, E – число ребер, а F – число граней (включая внешнюю). Так как каждая пара окружностей пересекается ровно в двух своих уникальных точках, то число вершин $V = 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = m(m-1)$. Так как каждая вершина – это точка пересечения ровно двух окружностей, то наш граф является регулярным степени 4 (то есть в каждую вершину входят ровно 4 ребра). Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, общее число ребер $E = \frac{4V}{2} = 2V = 2m(m-1)$. Следовательно число граней нашего плоского мультиграфа должно быть равно $F = 2 + E - V = 2 + 2m(m-1) - m(m-1) = 2 + m(m-1)$. Так как число круглосторонников $C = F - 1$, имеем $C = 1 + m(m-1)$.

Найти наименьшее m, такое, что $C \geq 2023$ – значит найти наименьшее натуральное решение неравенства $m^2 - m - 2022 \geq 0$. Такое число легко найти хоть подбором, хоть решая квадратное неравенство: $m = 46$. (Проверка еще проще: $45 \cdot 44 + 1 = 1981 < 2023 < 2071 = 46 \cdot 45 + 1$.)

Теперь заметим, что для любого $m \geq 1$ (в том числе для $m = 46$) можно расположить m окружностей на плоскости так, что каждая пара пересекается ровно в двух своих уникальных точках. Действительно, нарисуем произвольную окружность B на плоскости и выберем произвольную точку O внутри нее (но не являющуюся ее центром), а потом рассмотрим m окружностей B_k, $0 \leq k \leq (m-1)$, которые получаются в результате поворота окружности B вокруг точки O на угол $\frac{2\pi k}{m}$ (окружность B_0 совпадает с B). На рисунке приведен пример для $m = 4$.



Теперь докажем, что обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами. Предположим, что все круглосторонники ограничены не менее чем 4 дугами. Тогда общее число «сторон» (дуг, ограничивающих круглосторонники) не меньше, чем $4C = 4(1 + m(m-1))$. Пусть K – число границ внешней грани плоского мультиграфа, тогда $K+4C = K+4+4m(m-1) \leq 2m(m-1)$ (общее число ребер в нашем плоском графе), то есть $K + 4 + 2m(m-1) \leq 0$, что невозможно, – следовательно, неверно предположение, что все круглосторонники ограничены не менее чем 4 дугами. Поэтому обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4 дугами, что и требовалось доказать.

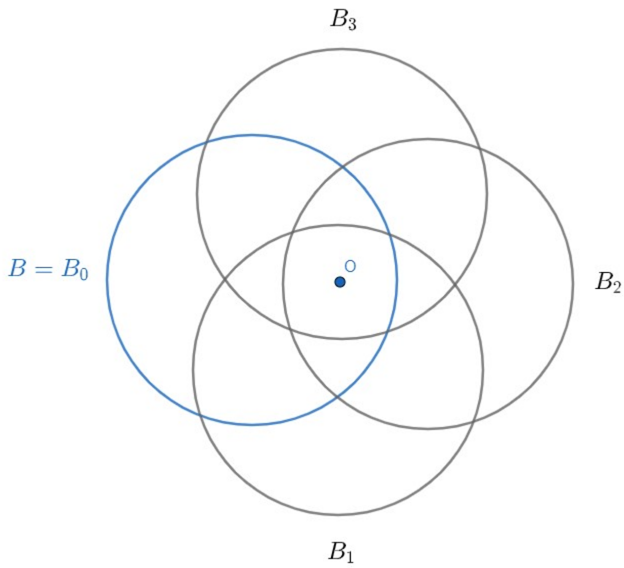
Задача полностью решена.

Solution (ENG). Consider the drawn circles as a flat multigraph (a graph with multiple edges between the vertices): the vertices are the circles' intersection points, the edges are their arcs between the intersection points. In this interpretation, round-gons are faces of this graph, except for the «outer» (i.e., the part of the plane that lies outside all circles) one.

Let exactly m circles be drawn. According to Euler's formula for planar graphs, $V - E + F = 2$, where V is the number of graph vertices, E is the number of edges, and F is the number of faces (including the outer one). Since each pair of the circles intersect at exactly two unique points, the number of vertices is $V = 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = m(m-1)$. Since each vertex is the intersection point of exactly two circles, our graph is regular of degree 4 (i.e., each vertex touches exactly 4 edges). Since each edge connects two vertices, the total number of edges is $E = \frac{4V}{2} = 2V = 2m(m-1)$. Therefore, the number of faces of our planar multigraph must be equal to $F = 2 + E - V = 2 + 2m(m-1) - m(m-1) = 2 + m(m-1)$. Since the number of round-gons $C = F - 1$, we have $C = 1 + m(m-1)$.

To find the smallest m such that $C \geq 2023$ is to find the smallest positive integer solution to the inequality $m^2 - m - 2022 \geq 0$. Such a number is easy to find: $m = 46$. $(45 \cdot 44 + 1 = 1981 < 2023 < 2071 = 46 \cdot 45 + 1.)$

Now note that for any $m \geq 1$ (including $m = 46$) one can arrange m circles on the plane so that each pair intersects in exactly two of its unique points. Indeed, let's draw an arbitrary circle B on the plane and choose an arbitrary point O inside it (but not being its center), and then consider m circles B_k, $0 \leq k \leq (m-1)$, which are obtained by rotating the circle B around the point O by the angle $\frac{2\pi k}{m}$ (circle B_0 coincides with B). The picture below shows an example for $m = 4$.

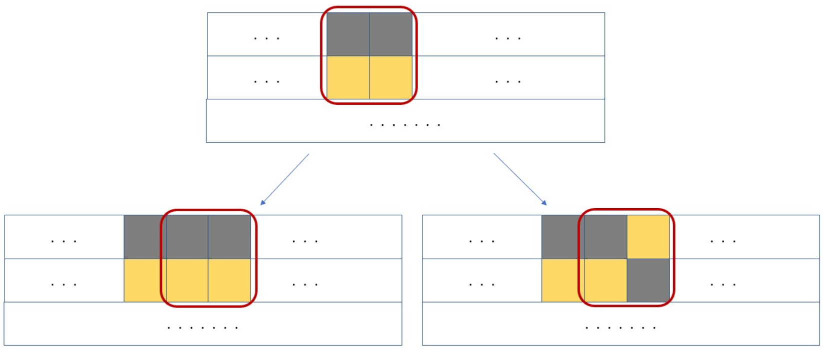


Now let's prove that there is a round-gon bounded by less than 4 arcs. Assume that all round-gons are bounded by at least 4 arcs. Then the total number of «sides» (arcs bounding round-gons) is not less than $4C = 4(1 + m(m-1))$. Let K be the number of boundaries of the outer face of the planar multigraph, then $K + 4C = K + 4 + 4m(m-1) \leq 2m(m-1)$ (the total number of edges in our planar graph), i.e. $K+4+2m(m-1) \leq 0$, which is impossible, hence the assumption that all round-gons are bounded by at least 4 arcs is false. Therefore, there is a round-gon bounded by less than 4 arcs, which was to be proved.

Task 5. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* Назовём клетчатый квадрат, каждая клетка которого покрашена в чёрный или в жёлтый цвет, *гармоничным*, если в нём количество чёрных клеток отличается от количества жёлтых клеток не более чем на единицу. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 100×100 в чёрный и жёлтый цвета так, чтобы любой квадрат в этой таблице был гармоничным?

Let's call a square (with each of its cells being painted in either black or yellow) *harmonious*, if the number of black cells differs from the number of yellow cells by no more than 1. How many ways are there to paint a 100×100 table in black and yellow if any square in the table must be harmonious?

Solution (RUS). Для начала заметим, что в каждом квадрате 2×2 должно быть по две клетки каждого цвета. Рассмотрим раскраску самой верхней строки квадрата. Предположим, что в ней есть какие-то две соседние клетки одинакового цвета. Тогда, рассмотрев квадрат 2×2, содержащий эти клетки, получим, что две клетки под ними должны быть противоположного цвета. Если теперь сдвинуть этот квадрат на одну клетку вправо, получим, что в левом столбце две клетки противоположного цвета, поэтому и в правом столбце клетки тоже должны быть противоположного цвета. Сдвигая этот квадрат аналогично вправо и влево, получим, что вторая строка должна быть противоположна (по цветам) первой.



Если теперь проделать такие же рассуждения со второй и третьей строкой, получим, что третья строка должна быть противоположна второй (т.к. во второй также найдутся две рядом стоящие клетки одного цвета). Аналогично далее строки будут чередоваться, и вся таблица заполняется однозначно. Теперь поймём, при каких условиях на первую строку раскраска будет подходящей. Предположим, что в первой строке найдётся подстрока, в которой клеток одного из цветов хотя бы на $k > 2$ больше, чем другого. Такую подстроку можно сократить до подстроки A длины m так, чтобы разница была ровно 3 (т.к. при отбрасывании одной клетки разница меняется на 1). Рассмотрим квадрат B размера $m \times m$, содержащий подстроку A. Так как в A разница между цветами равна 3, то m нечётно. Значит, в квадрате B тоже разница между цветами будет равна 3, т.к. все его строки, кроме первой, можно разбить на пары противоположных (понятно, что если в подстроке разница между цветами больше 1, то в ней найдутся две соседние клетки одного цвета).

Таким образом, в первой строке не должно найтись подстроки, в которой клеток какого-то цвета хотя бы на 3 больше, чем другого. Предположим, что это условие выполнено, причём каждая строка, начиная со второй, противоположна предыдущей. Тогда в любом квадрате чётного размера цветов будет поровну, а в любом квадрате нечётного размера количество клеток разных цветов будет отличаться на 1, т.к. все строки в нём, кроме первой, разбиваются на пары, а в первой строке количество клеток разных цветов может отличаться только на 1.

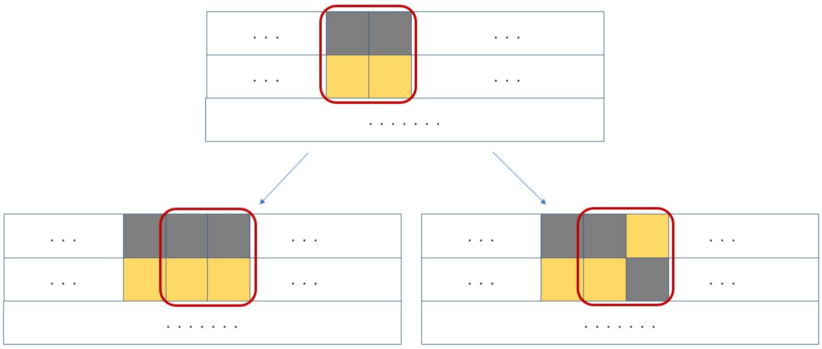
Обозначим количество подходящих раскрасок первой строки за x. Тогда количество подходящих раскрасок всей доски будет равно $x - 2 + x = 2x - 2$. Действительно, в первой строке будет либо чередование цветов (2 варианта), либо где-то встретятся две клетки одинакового цвета. Во втором случае всё остальное определяется однозначно, а в первом всё определяется раскраской первого столбца (если и в первой строке, и в первом столбце не будет двух стоящих рядом клеток одного цвета, то с помощью последовательного рассмотрения квадратов 2×2 мы получим, что раскраска должна быть шахматной).

Теперь осталось найти x. Заметим, что трёх подряд идущих клеток одного цвета быть не может, т.к. эти три клетки уже дают подстроку с разницей 3. Найдём в строке первый момент, когда рядом встретились две клетки одного цвета. Найдём следующий момент, когда рядом встретятся две клетки одного цвета. Если это тот же самый цвет, то в минимальной подстроке, содержащей обе эти пары, разница цветов будет равна 3, чего быть не может. Значит, это должны быть клетки другого цвета. Таким образом, блоки из пар клеток одного цвета должны чередоваться, а ещё между этими блоками могут быть участки чётной длины из чередующихся клеток. Тогда для расположения блоков может быть два варианта: либо их первые клетки расположены на нечётных местах, либо на чётных.

В первом случае разобьём все клетки на пары подряд идущих. На месте каждой пары может быть либо блок из двух одинаковых клеток, либо пара разных клеток. По набору мест блоков и цвету самой левой клетки цвета всех остальных клеток определяются однозначно. Таким образом, вариантов в этом случае $2 \cdot 2^{50} = 2^{51}$. В случае, когда первые клетки блоков располагаются на чётных позициях, есть всего 49 мест для блоков, и цвета всех клеток также определяются наборами мест блоков и цветом самой левой клетки. В этом случае вариантов $2 \cdot 2^{49} = 2^{50}$. При этом те варианты, где блоков вообще нет, мы посчитали дважды. Таких вариантов 2 (когда цвета чередуются). Значит, $x = 2^{51} + 2^{50} - 2$.

Получаем ответ: $2x - 2 = 2^{52} + 2^{51} - 6 = 3 \cdot 2^{51} - 6$.

Solution (ENG). First, note that each 2×2 square must contain two cells of each color. Consider coloring the topmost row of the square. Suppose that it has some two adjacent cells of the same color. Then, considering the square 2×2 containing these cells, we get that the two cells under them must be of the opposite color. If we now move this square by one cell to the right, we get that there are two cells of opposite color in the left column, so the cells in the right column must also be of the opposite color. Shifting this square similarly to the right and to the left, we get that the second line should be opposite (in colors) to the first one.



After the same reasoning with the second and third rows, we get that the third row must be opposite to the second one (because the second row also contains two adjacent cells of the same color). Similarly, further lines will alternate, and the entire table is filled uniquely. Now let's understand under what conditions the coloring for the first line will be appropriate. Assume that the first line contains a substring in which there are at least $k > 2$ more cells of one of the colors than the other. Such a substring can be reduced to a substring A of length m so that the difference is exactly 3 (because when one cell is discarded, the difference changes by 1). Consider a square B of size $m \times m$ containing the substring A. Since the difference between the colors in A is 3, then m is odd. Hence, in the square B the difference between the colors will also be equal to 3, because all of its rows, except for the first one, can be divided into pairs of opposite ones (it is clear that if the difference between colors in a substring is greater than 1, then it contains two adjacent cells of the same color).

Thus, in the first line there should not be a substring in which there are at least 3 more cells of some color than another one. Let's assume that this condition is met, moreover, each line, starting from the second, is opposite to the previous one. Then, in any square of even size, the colors will be equal, and in any square of odd size, the number of cells of different colors will differ by 1, because all rows in it (except for the first one) are divided into pairs, and in the first row the number of cells of different colors can differ only by 1.

Lets denote the number of suitable colorings of the first row as x. Then the number of suitable colorings of the entire board will be equal to $x - 2 + x = 2x - 2$. Indeed, in the first line will either alternate colors (2 variants), or somewhere there will be two cells of the same color. In the second case, everything else is determined uniquely, and in the first case, everything is determined by the coloring of the first column (if both the first row and the first column do not contain two adjacent cells of the same color, then by successively considering the squares 2×2 we get, that the coloring should be like that on chessboard).

Now it remains to find x. Note that there cannot be three consecutive cells of the same color, because these three cells already give a substring with a difference of 3. Let's find in the line the first moment when two cells of the same color met side by side. Find the next moment when two cells of the same color meet next to each other. If it is the same color, then the minimum substring containing both of these pairs will have a color difference of 3, which cannot be. So, it should be cells of a different color. Thus, blocks of pairs of cells of the same color must alternate, and even between these blocks there can be even-length sections of alternating cells. Then for the location of the blocks there can be two options: either their first cells are located in odd places, or in even ones.

In the first case, we divide all the cells into pairs of consecutive ones. In place of each pair there can be either a block of two identical cells, or a pair of different cells. By set places of blocks and the color of the leftmost cell, the colors of all other cells are uniquely determined. Thus, there are $2 \cdot 2^{50} = 2^{51}$ options in this case. In the case where the first cells of the blocks are in even positions, there are a total of 49 places for blocks, and the colors of all cells are also determined by the sets of block places and the color of the leftmost cell. In this case there are $2 \cdot 2^{49} = 2^{50}$ options. At the same time, those options where there are no blocks at all, we counted twice. There are 2 of such variants (when the colors alternate). So $x = 2^{51} + 2^{50} - 2$.

Now we get the answer: $2x - 2 = 2^{52} + 2^{51} - 6 = 3 \cdot 2^{51} - 6$.