Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и (если это предусмотрено условием) ответа.

7^{th} degree

Task 1.

1. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Сколько элементов содержит множество A_{24}?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
   Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
   Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   How many elements does the set A_{24} contain?

   Answer: 25

2. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n

уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{37}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{37} contain?

Answer: 38

3. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{42}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers

as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{42} contain?

Answer: 43

4. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{77}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{77} contain?

Answer: 78

Solution (RUS). Заметим,что, согласно определению A_n, для каждого натурального $n > 1$ такое множество содержит все элементы множества A_{n-1} и, кроме того, само множество A_{n-1} – значит, в множестве A_n на 1 элемент больше, чем в множестве A_{n-1}, на 2 элемента больше, чем в A_{n-2} и т.д.
Итак, в множестве A_n на $(n-1)$ элемент больше, чем в A_1 – значит, в нем $2+(n-1) = n+1$ элементов.

Solution (ENG). Note that, according to the definition of A_n, for each integer $n > 1$ such a set contains all elements of the set A_{n-1} and, in addition, the set A_{n-1} itself – hence, in set A_n has 1 more element than A_{n-1}, 2 more than A_{n-2}, etc.
So, in the set A_n, the number of elements is $(n-1)$ more than in A_1, which means that it has $2+(n-1) = n+1$ elements.

Task 2.

1. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 25 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 25 days while the doctor's restrictions are in effect?

   Answer: 178

2. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 32 дня, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 32 days while the doctor's restrictions are in effect?

   Answer: 227

3. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 39 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 39 days while the doctor's restrictions are in effect?

Answer: 276

4. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 45 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 45 days while the doctor's restrictions are in effect?

Answer: 318

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Докажем, что больше 178 конфет быть не могло. Пусть всё же получилось съесть больше. Выпишем в ряд слева направо количества конфет, съеденных Катей за каждый из дней, где самые левые числа обозначают конфеты, съеденные в первые дни, а самые правые - в последние. Получается ряд из 25ти чисел (в какой-то из дней может быть и 0). Будем идти вдоль этого ряда слева направа (то есть от самых давних значений к самым новым). В момент, когда будем встречать число 8 или больше, будем обводить это число и два последующих (или меньше, если до конца ряда осталось меньше чисел) в один овал - выделять их как группу. После выделения этой группы будем продолжать идти вдоль последовательности далее, если надо - снова выделяя новые группы овалами (один овал на одну группу из не более чем трёх чисел). Тогда внутри каждой выделенной группы из трёх чисел сумма не более $10 + 10$ (первое число в группе не более 10, сумма двух последующих не более 10). Внутри выделенной группы из двух чисел сумма не более 15 по аналогичной причине. Если число в такой группе одно, то сумма в этой группе не превосходит 10. Тогда все числа разбиваются на несколько выделенных групп и остаток из чисел, которые не относятся ни к одной из выделенных групп. Числа вне групп каждое не превышает 7. Обозначим количество полных выделенных групп (то есть с трёмя числами) k.
Если в конце ряда нет неполной группы (то есть содержащей одно или два числа), то в каждой группе сумма не превышает 20, как показано ранее. Чисел вне групп ровно $25 - 3k$, каждое не более 7. Значит общая сумма не превышает $7(25-3k)+20k = 7-25-k = 175-k$, где k - целое неотрицательное число. Значит максимум такой суммы равен 175.
Если в конце стоит неполная группа из одного числа (она не учитывается в количестве полных групп, которых k). Тогда сумма не превышает $7(25-3k-1)+20k+10 = 178-k$, то есть не более 178.
Если в конце стоит неполная группа из двух чисел, то (для формулировки с двумя пятёрками) сумма не превосходит $7(25-3k-2)+20k+10+5 = 175-14+15-k = 176-k$, то есть не более 176.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Let's prove that there could not have been more than 178 sweeties. Let Kate still happen to eat more. Let's write out in a row from left to right the number of sweets eaten by Katya for each of the days, where the leftmost numbers denote the sweets eaten in the first days, and the rightmost - in the last. It turns out a series of 25 numbers (in some of the days there may be 0). We will go along this row from the left direction (that is, from the oldest values to the newest ones). At the moment when we meet the number 8 or more, we will circle this number and two subsequent ones (or less, if there are fewer numbers left before the end of the row) in one oval - highlight them as a group. After selecting this group, we will continue to follow the sequence further, if necessary, again allocating new groups with ovals (one oval per group of no more than three numbers). Then, within each selected group of three

numbers, the sum is no more than $10+10$ (the first number in the group is no more than 10, the sum of the next two is no more than 10). Inside the selected group of two numbers, the sum is no more than 15 for a similar reason. If there is one number in such a group, then the amount in this group does not exceed 10.
Then all the numbers are divided into several selected groups and the remainder of the numbers that do not belong to any of the selected groups. The numbers outside the groups each do not exceed 7. Denote the number of complete selected groups (that is, with three numbers) k. If there is no incomplete group at the end of the row (that is, containing one or two numbers), then the sum in each group does not exceed 20, as shown earlier. The numbers outside the groups are exactly $25-3k$, each no more than 7. So the total amount does not exceed $7(25-3k)+20k = 7-25-k = 175-k$, where k is a non-negative integer. So the maximum of this amount is 175.
If there is an incomplete group of one number at the end (it is not counted in the number of complete groups, of which there are k). Then the amount does not exceed $7(25-3k-1)+20k+10 = 178-k$, that is, no more than 178.
If there is an incomplete group of two numbers at the end, then (for a formulation with two fives) the amount does not exceed $7(25-3k-2)+20k+10+5 = 175-14+15-k = 176-k$, that is, no more than 176.

Task 3.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N+2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N+2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

   Answer: 14348906

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N+4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N+4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

   Answer: 9765624

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N+3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N+3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

Answer: 16777215

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N + 5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N + 5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

Answer: 10077695

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Давайте рассмотрим, сколько конфет было у Рона после каждого заклинания.
0 заклинаний - 2 конфеты
1 заклинание - $3 \cdot 2 + 2$ конфет
2 заклинания - $3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
...
n заклинаний - $3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
Легко заметить, что количество конфет после n-го заклинания - сумма элементов геометрической прогрессии с первым элементом прогрессии $a = 2$ и знаменателем геометрической прогрессии $q = 3$. Заметим, что в нашей задаче $a = q - 1$. Таким образом, общая формула для количества конфет после n закинаний будет: $S(n) = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^{n+1} - 1$
Таким образом, при $n = 14$ мы получим $3^{15} - 1 = 14348906$ конфет.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Let's look at how many candies Ron had after each spell.
0 spells - 2 candies
1 spell - $3 \cdot 2 + 2$ candies
2 spells - $3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$ candies
...
n spells - $3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2 + 2$ candies
It is easy to notice that the number of candies after the nth spell is the sum of the elements of the geometric progression with the first element of the progression $a = 2$ and the denominator of the geometric progression $q = 3$. Note that in our problem $a = q - 1$. Thus, the general formula for the number of candies after n spells will be: $S(n) = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^{n+1} - 1$
Thus, for $n = 14$ we get $3^{15} - 1 = 14348906$ candies.

Task 4.

1. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 6 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 2

2. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 9 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 9 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 3

3. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 4.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 4.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 1.5

4. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 7.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 7.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 2.5

Solution (RUS). Пусть L - длина дорожки, и $t = 0$ в момент, когда папа и Саша начали движение от точки «Старт».
Ясно, что картинка полностью повторится, как только дедушка пройдёт полный круг – все скорости кратны v; так что рассматриваем только события до $T = L/v$.
За это время дедушка успеет повстречаться с Сашей 4 раза, а с папой один. Найдём времена t_1, t_2, t_3 и t_4 встреч Саши и дедушки, и время t_d встречи папы и дедушки: между Сашей и дедушкой до первой встречи расстояние $L - d$, скорость сближения - $4v$, далее добавляется $L/4v$ - время, за которое Саша проезжает от дедушки до дедушки. Таким образом, получаем общую формулу $t_i = \dfrac{iL - d}{4v}$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогично $t_d = \dfrac{L - d}{v}$. Теперь найдем решения уравнения $t_i = t_d$ относительно d (т.е. найдем при каких d все встретятся в одной точке). Решения: $d = L$, $d = 2L/3$, $d = L/3$, $d = 0$. По условию задачи нам подходит отет $d = L/3$, т.к. он минимальный и больше 0.

Solution (ENG). Let L be the length of the round path, and $t = 0$ at the moment when Alex and his dad started moving from the point «Start».
It is clear that the picture will completely repeat itself as soon as grandpa goes full circle – all speeds are multiples of v; so we consider only events up to $T = L/v$.
During this time, grandpa will have time to meet Alex 4 times, and with dad one. Let's find the times t_1, t_2, t_3 and t_4 meeting of Alex and grandpa, and the time t_d meeting of dad and grandpa: between Alex and grandpa before the first meeting, the distance is $L - d$, the speed of convergence is $4v$, then $L/4v$ is added - the time for which Alex passes from grandfathers to grandfathers. Thus, we obtain the general formula $t_i = \frac{id}{4v}$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Similarly, $t_d = \dfrac{L - d}{v}$. Now we will find solutions to the equation $t_i = t_d$ with respect to d (i.e. we will find at which d all meet at one point). Solutions: $d = L$, $d = 2L/3$, $d = L/3$, $d = 0$. By the condition of the problem, the answer $d = L/3$ is suitable for us, because it is minimal and greater than 0.

Task 5.

1. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 11 юных хоббитов закупила по 6 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 11 hobbits bought 6 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

2. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 14 юных хоббитов закупила по 8 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы.

Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 14 hobbits bought 8 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

3. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 17 юных хоббитов закупила по 9 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 17 hobbits bought 9 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

4. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 20 юных хоббитов закупила по 11 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 20 hobbits bought 11 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Если хоббитов 11, то, рассматривая каждую пару товаров (например, кресала и кремни – а их всего $2 \times 6 = 12$) в рюкзаках, по принципу Дирихле делаем вывод, что хотя бы в одном рюкзаке есть пара этих предметов.
По условию, в рюкзаке не может оказаться 2 кресала или 2 кремня, значит, хотя бы у одного хоббита в рюкзаке окажутся кресало и кремень (обозначим $\{x, y\}$). То же можно сказать о паре кремень и трут (обозначим $\{y, z\}$), о паре кресало и трут (обозначим $\{x, z\}$).
Таким образом, выполняется одно из двух условий:
a) есть хотя бы один хоббит с предметами $\{x, y, z\}$ в рюкзаке (все пары собрались хотя бы в одном рюкзаке) и он разведёт костёр,
b) есть 3 разных хоббита с предметами $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ соответственно, из этих трех хоббитов хотя бы два (по принципу Дирихле) окажутся в одной группе и тоже смогут развести костёр.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
If there are 11 hobbits, then considering each pair of goods (for example, steel and flints – and there

are only $2 \times 6 = 12$ of them) in backpacks, according to the Dirichlet principle, we conclude that at least one backpack has a pair of these items.
By convention, there cannot be 2 steel or 2 flints in the backpack , which means that at least one hobbit will have a steel and a flint in the backpack (denote $\{x, y\}$). The same can be said about the pair of flint and tinder (denote $\{y, z\}$), about the pair of steel and tinder (denote $\{x, z\}$).
Thus, one of two conditions is met:
a) there is at least one hobbit with items $\{x, y, z\}$ in a backpack (all pairs gathered in at least one backpack) and he will make a fire,
b)there are 3 different hobbits with objects $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, respectively, of these three hobbits at least two (according to the Dirichlet principle) will be in the same group and they will also be able to make a fire.

Task 6.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Петя (первый игрок) может гарантировать себе победу.
Для победы Пети следует своим первым ходом вырезать центральную клетку квадрата, а далее на каждый ход Вити отвечать симметричным ходом относительно центра доски.
Покажем, что если Витя сделал свой очередной ход, то Петя тоже сможет сделать ход согласно этой стратегии: действительно, после каждого сделанного хода Пети картинка из закрашенных клеток на доске (не учитывая цвет) симметрична. Тогда, если Витя сделал свой очередной ход, то симметричная зона доски перед ходом Вити была также свободна.
Остается объяснить, почему сам последний ход Вити не затронул эти клетки. Но действительно, если одним ходом Витя покрасил бы две какие-либо симметричные относительно центра клетки, то так как этот ход состоял в закрашивании прямоугольника, то и центр симметрии клеток должен был попасть в эту фигуру. Однако центр симметрии уже был изначально закрашен Петей. Значит Витя не мог «испортить» позицию для Пети, и Петя может сделать ход. Кто-то в этой игре обязательно проигрывает, и это не Петя. Значит, Петя выигрывает.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Peter (the one whose move is the first) can guarantee himself a victory.
To win, Peter should cut out the central square cell with his first move, and then respond to each move with a symmetrical move relative to the center of the board.
Let's show that if Victor made his next move, then Peter will also be able to make a move according to this strategy: indeed, after each move made by Peter, the picture of the painted cells on the board (not taking into account the color) is symmetrical. Then, if Victor made his next move, then the symmetrical area of the board before Victor's move was also free.
It remains to explain why the very last move of Victor did not affect these cells. But really, if Victor painted two cells that were symmetrical with respect to the center with one move, then since this move consisted in painting over a rectangle, then the center of symmetry of the cells had to fall into this figure. However, the center of symmetry was already initially painted over by Peter. So Victor could not «spoil» the position for Peter, and Peter can make a move. Someone in this game is bound to lose, and it's not Peter. So, Peter wins.